Beiblätter zur Vorlesung Mathematik für Biologen

Normalapproximation

1.) Seien $X_1, ..., X_n$ unabhängig identisch verteilte reelle Zufallsvariablen mit Erwartungswert $\mu = E(X_i)$ und Varianz $\sigma^2 = Var(X_i) > 0$.

(a) Es gilt die Normalapproximation:

$$P\left(a < \sum_{i=1}^{n} X_i \leq b\right) \approx \Phi\left(\frac{b - n\,\mu}{\sqrt{n\,\sigma^2}}\right) - \Phi\left(\frac{a - n\,\mu}{\sqrt{n\,\sigma^2}}\right)$$

(Dabei bedeutet $\approx$ "ungefähr gleich".)

(b) Nehmen die X_i nur ganze Zahlen als Werte an, so erhält man für $a, b \in \mathbb{Z}$ meist eine bessere Näherung durch die Normalapproximation mit Stetigkeitskorrektur:

$$\begin{aligned} P\left(a \leq \sum_{i=1}^{n} X_i \leq b\right) &= P\left(a - \frac{1}{2} < \sum_{i=1}^{n} X_i \leq b + \frac{1}{2}\right) \\ &\approx \Phi\left(\frac{b + \frac{1}{2} - n\,\mu}{\sqrt{n\,\sigma^2}}\right) - \Phi\left(\frac{a - \frac{1}{2} - n\,\mu}{\sqrt{n\,\sigma^2}}\right). \end{aligned}$$

Dabei ist

$$\Phi(a) = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}} \int_{-\infty}^{a} \exp(-x^2/2)\,dx \quad \text{für } a \in \mathbb{R},$$

und es gilt: $\Phi(a) + \Phi(-a) = 1$.

2.) Für großes n gilt näherungsweise

$$\begin{aligned} P\left(|\overline{X}_n - \mu| \leq \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) &\geq \frac{2}{3} \\ P\left(|\overline{X}_n - \mu| \leq \frac{2\,\sigma}{\sqrt{n}}\right) &\geq 0.95 \\ P\left(|\overline{X}_n - \mu| \leq \frac{3\,\sigma}{\sqrt{n}}\right) &\geq 0.99, \end{aligned}$$

wobei $\overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$ ist.