Beiblätter zur Vorlesung Mathematik für Biologen

Bionomialkoeffizienten und das Pascalsche Dreieck

Definition 1: Für $n \in \mathbb{N}_0$ ist die Zahl $n!$ (sprich: "n-Fakultät") definiert durch

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n, \qquad 0! = 1.$$

Definition 2: Für $n \in \mathbb{N}_0$ und $0 \leq k \leq n$ heisst die Zahl

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

der Binomialkoeffizient von n über k.

Für Binomialkoeffizienten gilt:

(1) Für $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ (Binomialsatz)

(2) $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \quad , \quad \binom{n}{1} = n$

(3) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

(4) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

(5) $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

Aus der Eigenschaft (5) erhält man das **Pascalsche Dreieck**. Dabei schreibt man in die n-te Zeile die Binomialkoeffizienten $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \ldots, \binom{n}{n}$. Man erhält also:

n=0:								1								
n=1:							1		1							
n=2:						1		2		1						
n=3:					1		3		3		1					
n=4:				1		4		6		4		1				
n=5:			1		5		10		10		5		1			
n=6:		1		6		15		20		15		6		1		
n=7:	1		7		21		35		35		21		7		1	
n=8:	1		8		28		56		70		56		28		8		1

Ablesebeispiel: Durch die Pfeile ist die Berechnung von $\binom{6}{4} + \binom{6}{5} = \binom{7}{5}$ angedeutet. Man erhält somit

$$\begin{array}{ccccc} \binom{6}{4} & + & \binom{6}{5} & = & \binom{7}{5}, \\ 15 & + & 6 & = & 21. \end{array}$$