MATHEMATISCHES INSTITUT

PROF. DR. CHRISTIANE HELZEL
SINA DAHM

28. NOVEMBER 2019

Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Numerische Verfahren hyperbolischer Erhaltungsgleichungen – 8. Übungsblatt

Aufgabe 27: Leiten Sie die Gleichungen der linearen Akustik

$$\begin{pmatrix} \tilde{p} \\ \tilde{u} \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} u_0 & K_0 \\ 1/\rho_0 & u_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{p} \\ \tilde{u} \end{pmatrix}_x = 0$$

aus dem linearisierten System (vgl. mit VL)

$$\begin{pmatrix} \tilde{\rho} \\ \tilde{\rho u} \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -u_0^2 + P'(\rho_0) & 2u_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\rho} \\ \tilde{\rho u} \end{pmatrix}_x = 0$$

her.

Aufgabe 28: Bestimmen Sie für $t > 0$ die Lösung für die Gleichungen der linearen Akustik

$$\begin{pmatrix} p \\ u \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} 0 & K_0 \\ 1/\rho_0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ u \end{pmatrix}_x = 0$$

mit den Anfangsdaten

$$\begin{aligned} p(x,0) &= \begin{cases} 1 : 1 \leq x \leq 2, \\ 0 : \text{sonst}, \end{cases} \\ u(x,0) &= 0. \end{aligned}$$

Aufgabe 29: Implementieren Sie den Godunov Algorithmus für die lineare Akustik, indem Sie

(1) eine Funktion schreiben, die zu gegebenen Daten q_l und q_r die Lösung des Riemann-Problems berechnet und

(2) mit Hilfe dieser Funktion den numerischen Fluss in der Form $F_{i+1/2} = AQ^{\downarrow}_{i+1/2}$ berechnet.

Testen Sie Ihr Programm an den Anfangsdaten aus Aufgabe 28 mit $\rho_0 = 1, K_0 = 0.25$ mit einer geeigneten Diskretisierung und Endzeitwahl. Nehmen Sie periodische Randwerte an.

Aufgabe 30:

(a) Zeigen Sie, dass für glatte Lösungen das System aus Erhaltungsgleichungen

$$\begin{aligned} \rho_t + (\rho u)_x &= 0, \\ (\rho u)_t + (\rho u^2 + P(\rho))_x &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

in das folgende System nichtlinearer Gleichungen für den Druck und die Geschwindigkeit:

$$\begin{aligned} p_t + up_x + \rho P'(\rho) u_x &= 0, \\ u_t + (1/\rho) p_x + uu_x &= 0, \end{aligned} \tag{2}$$

überführt werden kann. Nehmen Sie dabei an, dass die Zustandsgleichung invertiert werden kann, um das System mit ρ als Funktion von p zu vervollständigen.

(b) Zeigen Sie, dass das nichtlineare System (2) hyperbolisch ist, falls $P'(\rho) > 0$ und dass es die gleichen charakteristischen Geschwindigkeiten wie das konservative System (1) hat.

Abgabe am 5. Dezember 2019 am Beginn der Vorlesung.
Besprechung in der Übung am 12. Dezember 2019.