Mathematisches Institut

Prof. Dr. Christiane Helzel
Sina Dahm

21. November 2019

Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Numerische Verfahren hyperbolischer Erhaltungsgleichungen – 7. Übungsblatt

Aufgabe 23: Beweisen Sie das folgende Lemma aus der Vorlesung:

Q^n sei mit einem konsistenten, konservativen Verfahren mit numerischer Flussfunktion $F_{i+\frac{1}{2}} = \mathcal{F}(Q_i^n, Q_{i+1}^n)$ berechnet. Aus $TV\,(Q^n) \leq R$, $\forall n, \Delta t$ mit $\Delta t < \Delta t_0$, $n\Delta t \leq T$ folgt:

$$\exists \alpha > 0 : \|Q^{n+1} - Q^n\|_1 \leq \alpha \Delta t \quad \forall n\Delta t, \Delta t < \Delta t_0, n\Delta t \leq T.$$

Aufgabe 24: Zeigen Sie, dass der Mittelungsprozess in einem Verfahren der Form Rekonstruktion-Evolution-Mittelung nicht zu einer Erhöhung der Totalvariation führt.

Aufgabe 25: Betrachten Sie auf $\Omega = \mathbb{R} \times [0, \infty)$ die Burgersgleichung

$$\partial_t q + \partial_x \left(\frac{q^2}{2} \right) = 0$$

mit Anfangsdaten

$$q(x,0) = q_0(x) = \begin{cases} 2: & x \leq 0 \\ 1: & x > 0 \end{cases}$$

Berechnen Sie die numerische Lösung unter Verwendung des Godunov-Verfahrens basierend auf der Lösung von Riemann-Problemen. Wählen Sie sinnvolle Parameter $T, \Delta x, \Delta t$, die Endzeit sowie Schrittweite in Ort und Zeit angeben. Stellen Sie Ihre Lösung jeweils mit der exakten Lösung dar.

Aufgabe 26: Schreiben Sie ein Programm, das das Riemann Problem der Gleichung $q_t + Aq_x = 0$ mit Anfangsdaten q_l und q_r löst und die Lösung in der $x-t$ Ebene darstellt. Stellen Sie weiterhin die Lösung für festes t als Funktion von x dar.
Testen Sie Ihr Programm an den folgenden Beispielen:

(a)
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad q_l = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad q_r = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(b)
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad q_l = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad q_r = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Abgabe am 28. November 2019 am Beginn der Vorlesung.
Besprechung in der Übung am 5. Dezember 2019.