MATHEMATISCHES INSTITUT
PROF. DR. CHRISTIANE HELZEL
SINA DAHM

14. NOVEMBER 2019

Numerische Verfahren hyperbolischer Erhaltungsgleichungen – 6. Übungsblatt

Aufgabe 19: Zeigen Sie, dass die numerische Flussfunktion des Godunov Verfahrens, angewandt auf die Burgersgleichung, die Form

$$F_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \begin{cases} \min_{Q_{i-1}^n \leq q \leq Q_i^n} f(q) & : \quad Q_{i-1}^n \leq Q_i^n \\ \max_{Q_i^n \leq q \leq Q_{i-1}^n} f(q) & : \quad Q_i^n \leq Q_{i-1}^n \end{cases}$$

hat.

Aufgabe 20: Sei η eine Funktion, die auf $\{q(x)|x_{i-1/2} \leq x \leq x_{i+1/2}\}$ konvex ist. Beweisen Sie, dass

$$\eta\left(\frac{1}{\Delta x}\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} q(x)dx\right) \leq \frac{1}{\Delta x}\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \eta(q(x))dx$$

gilt.

Aufgabe 21: Sei $x_j := j\Delta x$, $\operatorname{supp}(q_0) = -[M, M]$ und

$$Q_j^0 := \frac{1}{\Delta x}\int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} q_0(x)dx.$$

Weiterhin sei $\mathcal{F} \in C^{0,1}\left(\mathbb{R}^2\right)$ ein numerischer Fluss und Q_j^n, $n \geq 1$ durch das Verfahren

$$Q_j^{n+1} = Q_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(\mathcal{F}(Q_j^n, Q_{j+1}^n) - \mathcal{F}(Q_{j-1}^n, Q_j^n)\right)$$

gegeben. Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Erhaltungseigenschaft

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} Q_j^{n+1} = \sum_{j\in\mathbb{Z}} Q_j^n$$

gilt.

Aufgabe 22: In der Voraussetzung des Satzes von Lax-Wendroff wurde in der Vorlesung die Konvergenz in der 1-Norm sowie die Beschränkung der Totalvariation angegeben. In dem Originalartikel *Systems of Conservation Laws* wird eine andere Voraussetzung angegeben. Lesen Sie den entsprechenden Teil des Artikels und geben Sie die dort angegeben Voraussetzungen an. Sie können den Artikel unter *http://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/cpa.3160130205/pdf* aus dem Universitätsnetz einsehen. Bestimmen Sie eine Beziehung zwischen den beiden Voraussetzungen, d.h. untersuchen Sie die zwei Aussagen auf Implikationen und Äquivalenz. Beschränken Sie sich auf den Fall skalarer Erhaltungsgleichungen.

Abgabe am 21. November 2019 am Beginn der Vorlesung.
Besprechung in der Übung am 28. November 2019.