Mathematisches Institut

Prof. Dr. Christiane Helzel
Sina Dahm

7. November 2019

Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Numerische Verfahren hyperbolischer Erhaltungsgleichungen – 5. Übungsblatt

Aufgabe 16: Beweisen Sie Satz 1.22 aus der Vorlesung.

Aufgabe 17: Betrachten Sie die Buckley-Leverett Gleichung, d.h. die Erhaltungsgleichung

$$\partial_t q + \partial_x f(q) = 0$$

mit der Flussfunktion

$$\frac{q^2}{q^2 + a(1-q)^2}, \quad 0 < a < 1.$$

Bestimmen Sie die Lösungsstruktur des Riemann-Problems

$$q(x,0) = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ 0, & x > 0. \end{cases}$$

Lesen Sie Abschnitt 16.1 aus dem Buch von LeVeque zur Bedeutung der Buckley-Leverett Gleichung.

Aufgabe 18: Schreiben Sie ein Programm zur Approximation der Buckley-Leverett Gleichung:

$$\begin{aligned} \partial_t q + \partial_x \frac{q^2}{q^2 + a(1-q)^2} &= 0, && 0 < a < 1, \forall x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ q(x,0) &= \begin{cases} 1, & x < 0, \\ 0, & x > 0, \end{cases} && \forall x \in \mathbb{R}, \\ q(x,+1,t) &= q(x,t), && \forall x \in \mathbb{R}, t > 0, \end{aligned}$$

mittels

(a) Lax-Friedrichts Verfahren:

$$Q_i^{n+1} = \frac{1}{2}(Q_{i-1}^n + Q_{i+1}^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(f(Q_{i+1}^n) - f(Q_{i-1}^n))$$

(b) Richtmyer 2-Schritt Lax-Wendroff Verfahren:

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(F_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - F_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}\right)$$

mit

$$\begin{aligned} F_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} &= f\left(Q_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}\right) \\ Q_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} &= \tfrac{1}{2}\left(Q_{i-1}^n + Q_i^n\right) - \tfrac{\Delta t}{2\Delta x}\left(f\left(Q_i^n\right) - f(Q_{i-1}^n)\right) \end{aligned}$$

Testen Sie Ihr Programm für verschiedene Anfangsdaten.

Abgabe am 14. November 2019 am Beginn der Vorlesung.
Besprechung in der Übung am 18. November 2019.