MATHEMATISCHES INSTITUT

PROF. DR. CHRISTIANE HELZEL
SINA DAHM

31. OKTOBER 2019

Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Numerische Verfahren hyperbolischer Erhaltungsgleichungen – 4. Übungsblatt

Aufgabe 12: Beweisen Sie: Klassische Lösungen des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} q_t + f(q)_x &= 0, && -\infty < x < \infty, t > 0, \\ q(x,0) &= q_0(x), && -\infty < x < \infty, \end{aligned}$$

sind auch schwache Lösungen.

Aufgabe 13:

(a) Zeigen Sie, dass die Erhaltungsgleichung

$$\partial_t \left(q^2\right) + \partial_x \left(\frac{2}{3} q^3\right) = 0$$

die gleichen klassischen Lösungen wie die Burgersgleichung hat.

(b) Zeigen Sie, dass die beiden Gleichungen unterschiedliche schwache Lösungen haben.

Aufgabe 14: Betrachten Sie auf $\Omega = \mathbb{R} \times [0, \infty)$ die Burgersgleichung

$$\begin{aligned} \partial_t q + \partial_x \left(\tfrac{q^2}{2}\right) &= 0, && \forall x \in \mathbb{R}, \\ q(x,0) &= q_0(x), && \forall x \in \mathbb{R}, \\ q(x+1,t) &= q(x,t), && \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(a) Implementieren Sie das Finite Volumen Verfahren

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(F_{i+1/2} - F_{i-1/2}\right)$$

mit folgendem numerischen Fluss:

$$F_{i+1/2} = \begin{cases} 0.5\left(Q_{i+1}^n\right)^2, & 0.5(Q_i^n + Q_{i+1}^n) < 0, \\ 0.5\left(Q_i^n\right)^2, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(b) Testen Sie Ihr Verfahren an den Anfangsdaten

$$q_0(x) = 1 + \sin(2\pi x)$$

auf dem Gebiet $[0, 1]$ und stellen Sie die numerische Lösung zu den Zeitpunkten $T \in \{0.05, 0.1, 0.15\}$ dar.

(c) Testen Sie Ihr Programm an den Anfangsdaten

$$q(x,0) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1] \setminus [0.4, 0.6], \\ -0.5, & 0.4 \leq x \leq 0.6 \end{cases}$$

auf dem Gebiet $[0,1]$ und stellen Sie die numerische Lösung zu den Zeitpunkten $T \in \{0.05, 0.1, 0.15\}$ dar. Bestimmen Sie analytisch die schwache Lösung. Wie bewerten Sie Ihre numerische Lösung?

Aufgabe 15: Zeigen Sie, dass die viskose Burgersgleichung

$$\partial_t q + q \partial_x q = \epsilon \partial_{xx} q$$

'traveling wave' Lösungen der Form $q_\epsilon(x,t) = w((x - st)/\epsilon)$ hat.
Hinweis: Es sei $\zeta = (x - st)/\epsilon$. Leiten Sie eine gewöhnliche Differentialgleichung für w her und verifizieren Sie, dass diese Differentialgleichung Lösungen der Form

$$w(\zeta) = q_r + \frac{1}{2}(q_l - q_r)\left(1 - \tanh\left(\frac{(q_l - q_r)\,\zeta}{4}\right)\right),$$

mit $q_l > q_r$ und $s = (f(q_l) - f(q_r))/(q_l - q_r)$ hat. Skizzieren Sie die Lösung. Wie verhält sich die Lösung $q_\epsilon(x,t)$ in Abhängigkeit von ϵ?

Abgabe am 7. November 2019 am Beginn der Vorlesung.
Besprechung in der Übung am 14. November 2019.