Mathematisches Institut

Prof. Dr. Christiane Helzel
Sina Dahm

24. Oktober 2019

Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Numerische Verfahren hyperbolischer Erhaltungsgleichungen – 3. Übungsblatt

Aufgabe 8: Für ein Upwind-Verfahren auf einem ungleichmäßigen Gitter seien die Gitterweiten h_i gegeben und es wird angenommen, dass es Koeffizienten $\underline{c}, \overline{c}$ gibt, sodass stets

$$\underline{c}h \leq h_i \leq \overline{c}h \quad \forall i$$

gilt, wobei $h := \max_i h_i$.

(a) Bestimmen Sie den lokalen Abbruchfehler des Verfahrens

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{c\Delta t}{h_i}(Q_i^n - Q_{i-1}^n).$$

(b) Zeigen Sie, dass das Verfahren

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{2c\Delta t}{h_i + h_{i-1}}(Q_i^n - Q_{i-1}^n)$$

die Konsistenzordnung 1 hat, die Erhaltungseigenschaft aber nicht erfüllt.

(c) Wir definieren den numerischen Fluss an den Zellkanten als Newtoninterpolation der Flüsse in den Zellmitten:

$$f_{i+\frac{1}{2}}^n = f(Q_i^n) + \frac{f(Q_i^n) - f(Q_{i-1}^n)}{h_i + h_{i-1}} h_i.$$

Zeigen Sie zunächst, dass

$$f_{i+\frac{1}{2}}^n \approx f(Q_i^n) + \frac{\partial f(Q_i^n)}{\partial x}\frac{h_i}{2} - \frac{\partial^2 f(Q_i^n)}{\partial x^2}\frac{(h_i + h_{i-1})h_i}{8}$$

und

$$f_{i-\frac{1}{2}}^n \approx f(Q_i^n) - \frac{\partial f(Q_i^n)}{\partial x}\frac{h_i}{2} - \frac{\partial^2 f(Q_i^n)}{\partial x^2}\alpha,$$

wobei $\alpha = \mathcal{O}(h^2)$.

(d) Berechnen Sie den lokalen Abbruchfehler des konservativen Verfahrens

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{\Delta t}{h_i}\left(f_{i+\frac{1}{2}}^n - f_{i-\frac{1}{2}}^n\right).$$

Welche Konsistenzordnung erhält man auf einem äquidistanten Gitter?

Aufgabe 9: Beweisen Sie Parseval's Beziehung

$$\|Q^n\|_2 = \|\hat{Q}^n\|_2.$$

Aufgabe 10: Betrachten Sie ein allgemeines explizites zentriertes Differenzenverfahren der Form

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{c\Delta t}{2\Delta x}\left(Q_{i+1}^n - Q_{i-1}^n\right) + \sigma\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\left(Q_{i-1}^n - 2Q_i^n + Q_{i+1}^n\right). \tag{1}$$

Für $\sigma = \frac{\Delta t c^2}{2}$ handelt es sich um das Lax-Wendroff-Verfahren, für $\sigma = \frac{\Delta x^2}{2\Delta t}$ um das Lax-Friedrichs-Verfahren.

Führen Sie eine von Neumann Stabilitätsanalyse für ein allgemeines explizites zentriertes Differenzenverfahren (1) durch. Betrachten Sie auch den Fall $\sigma = \frac{\Delta x^2}{2\Delta t}$. Was passiert für größere σ?

Aufgabe 11: Betrachten Sie wie in Aufgabe 2 auf $\Omega = \mathbb{R} \times [0, \infty)$ die Advektionsgleichung mit periodischen Randbedingungen

$$\begin{aligned} \partial_t q(x,t) + c\partial_x q(x,t) &= 0, && c > 0, \\ q(x,0) &= q_0(x), && \forall x \in \mathbb{R}, \\ q(x+1,t) &= q(x,t), && \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{2}$$

(a) Diskretisieren Sie die Advektionsgleichung auf dem Intervall $[0,1]$ und implementieren Sie das Lax-Wendroff Verfahren.

(b) Betrachten Sie das AWP (2) mit Advektionsgeschwindigkeit $c = 2$, Anfangsdaten

$$q(x,0) = \begin{cases} 0 : x \in [0,1] \setminus [0.6, .08] \\ 1 : 0.6 \leq x \leq 0.8 \end{cases}$$

und der Periodizitätsbedingung $q(t, x+1) = q(t,x)\ \forall x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}^+$.

Wenden Sie das Lax-Wendroff Verfahren auf dieses AWP an und stellen Sie die numerischen Ergebnisse des Verfahrens zum Zeitpunkt $t = 1$ gemeinsam mit der exakten Lösung graphisch dar.

(c) Betrachten Sie das AWP (2) mit Advektionsgeschwindigkeit $c = 1$, Anfangsdaten

$$q(x,0) = \sin(2\pi n x), \quad \text{für } x \in [0,1], \quad n = 10$$

und der Periodizitätsbedingung $q(x+1,t) = q(x,t)\ \forall x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}^+$.

Stellen Sie auch für diese Anfangsdaten die numerische Lösung des Verfahrens zum Zeitpunkt $t = 10$ zusammen mit der exakten Lösung graphisch dar.

Abgabe am 31. Oktober 2019 am Beginn der Vorlesung.
Besprechung in der Übung am 7. November 2019.