MATHEMATISCHES INSTITUT
PROF. DR. CHRISTIANE HELZEL
SINA DAHM

17. OKTOBER 2019

Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Numerische Verfahren hyperbolischer Erhaltungsgleichungen – 2. Übungsblatt

Aufgabe 4:

(a) Betrachten Sie die Advektionsgleichung

$$\begin{aligned} \partial_t q(x,t) + c\partial_x q(x,t) &= 0, & x \in \mathbb{R}, c > 0, \\ q(x,0) &= 2H(-x), & x \in \mathbb{R}, \\ q(-1,t) &= 2, & \forall t > 0, \end{aligned} \tag{1}$$

wobei

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0, \end{cases}$$

die Heaviside-Funktion ist. Approximieren Sie (1) mit dem Upwind-Verfahren aus Aufgabe 2 auf dem Intervall $[-1, 4]$. Verwenden Sie $c = 1$, $T = 3$ und die CFL-Zahl $\gamma = \frac{c\Delta t}{\Delta x} = 0.8$. Verwenden Sie verschiedene Gitterweiten h und bestimmen Sie die experimentelle Konvergenzrate. Wieso erhalten Sie nicht die erwartete Konvergenzordnung?

(b) Zum besseren Verständnis betrachten wir die modifizierte Gleichungsanalyse. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass mit dem Upwind-Verfahren die Advektions-Diffusionsgleichung

$$\partial_t q(x,t) + c\partial_x q(x,t) = \beta \partial_{xx} q(x,t), \quad (c > 0), \tag{2}$$

mit $\beta = \frac{1}{2}ch(1-\gamma)$ von höherer Ordnung approximiert wird. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$v(x,t) = \operatorname{erfc}\left(\frac{x - ct}{\sqrt{4\beta t}}\right)$$

mit

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-z^2} dz$$

das Anfangswertproblem (2) mit Anfangsdaten

$$q(x,0) = 2H(-x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{3}$$

exakt löst.
Hinweis: Es gilt

$$\operatorname{erfc}(-\infty) = 2, \quad \operatorname{erfc}(0) = 1, \quad \operatorname{erfc}(\infty) = 0.$$

(c) Vergleichen Sie die exakten Lösungen von (1) und (2),(3), indem Sie zu einem beliebigen Zeitpunkt t

$$\|q - v\|_1 = \int_{\infty}^{\infty} |q(x,t) - v(x,t)| dx$$

berechnen. Welche Konvergenzordnung erhalten Sie?

Aufgabe 5: Führen Sie eine modifizierte Gleichungsanalyse für das implizite Upwind-Verfahren durch.

Aufgabe 6: Es gelte

$$q_t(x,t) + (c(x)q(x,t))_x = 0.$$

Betrachten Sie eine neue Variable $\overline{q}$ mit $q(x,t) = \kappa(x)\overline{q}(x,t)$ und $c(x)\kappa(x) = \text{konst}$. Leiten Sie eine partielle Differentialgleichung für $\overline{q}$ her.

Aufgabe 7: Betrachten Sie die Erhaltungsgleichung

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial(c(x)q)}{\partial x} = 0.$$

Die charakteristischen Kurven $X(t)$ dieser partiellen Differentialgleichungen sind Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$X'(t) = c\left(X(t)\right).$$

(a) Zeigen Sie, dass Lösungen der partiellen Differentialgleichung entlang der charakteristischen Kurven die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt} q\left(X(t), t\right) = -c'\left(X(t)\right) q\left(X(t), t\right)$$

erfüllen.

(b) Zeigen Sie, dass Lösungen der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial q}{\partial t} + c(x)\frac{\partial q}{\partial x} = 0$$

entlang der charakteristischen Kurven konstant sind.

Abgabe am 24. Oktober 2019 am Beginn der Vorlesung.
Besprechung in der Übung am 28. Oktober 2019.