MATHEMATISCHES INSTITUT
PROF. DR. CHRISTIANE HELZEL
SINA DAHM

16. JANUAR 2020

Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Numerische Verfahren hyperbolischer Erhaltungsgleichungen – 12. Übungsblatt

Aufgabe 42:

Betrachten Sie das p-System

$$\begin{aligned} v_t - u_x &= 0 \\ u_t + p(v)_x &= 0. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass für dieses System das Integral

$$f(Q_i) - f(Q_{i-1}) = \left[\int_0^1 f'(q(\zeta)) d\zeta \right] (Q_i - Q_{i-1})$$

mit dem Integrationspfad $q(\zeta) = Q_{i-1} + (Q_i - Q_{i-1})\zeta$ ausgewertet werden kann, um die folgende Roe Linearisierung zu erhalten:

$$\hat{A}_{i-1/2} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \dfrac{p_i - p_{i-1}}{v_i - v_{i-1}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 43:

Betrachten Sie das System $q_t + Aq_x + Bq_y = 0$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass diese beiden Matrizen simultan diagonalisierbar sind und geben Sie für beliebige Anfangsdaten eine Formel für die allgemeine Lösung des Systems an.

Aufgabe 44:

Betrachten Sie das folgende zwei-dimensionale System aus Erhaltungsgleichungen

$$u_t + (u^2)_x + (uv)_y = 0,$$

$$v_t + (uv)_x + (v^2)_y = 0.$$

Untersuchen Sie auf Hyperbolizität.

Abgabe am 23. Januar 2020 am Beginn der Vorlesung.
Besprechung in der Übung am 30. Februar 2020.