MATHEMATISCHES INSTITUT

PROF. DR. CHRISTIANE HELZEL
SINA DAHM

9. JANUAR 2020

Numerische Verfahren hyperbolischer Erhaltungsgleichungen – 11. Übungsblatt

Aufgabe 39: Betrachten Sie das unlimitierte hochauflösende Verfahren zur Approximation der Transportgleichung mit variabler Geschwindigkeit

$$q_t + (u(x)q)_x = 0, \quad (u(x) > 0 \quad \forall x)$$

mit

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{i-\frac{1}{2}} &= Q_i - Q_{i-1}, \\ s_{i-\frac{1}{2}} &= u_{i-\frac{1}{2}}, \\ \mathcal{A}^+\Delta Q_{i-\frac{1}{2}} &= u_{i-\frac{1}{2}}\left(Q_i - Q_{i-1}\right), \\ \mathcal{A}^-\Delta Q_{i-\frac{1}{2}} &= \left(u_{i-\frac{1}{2}} - u_{i-\frac{3}{2}}\right) Q_{i-1} \end{aligned}$$

und dem Korrekturterm

$$F_{i-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}|s_{i-\frac{1}{2}}|\left(1 - \frac{\Delta t}{\Delta x}|s_{i-\frac{1}{2}}|\right)\mathcal{W}_{i-\frac{1}{2}}.$$

Bestimmen Sie die Konsistenzordnung dieses Verfahrens.

Aufgabe 40: Die Transportgleichung mit variabler Geschwindigkeit

$$q_t + (u(x)q)_x = 0, \quad (u(x) > 0 \quad \forall x)$$

kann als das folgende hyperbolisches System betrachtet werden

$$\begin{aligned} q_t + (u(x)q)_x &= 0, \\ u_t &= 0, \end{aligned}$$

wobei $u(x,t) \equiv u(x)$ als zweite Komponente des Systems betrachtet wird.

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Jakobi-Matrix dieses Systems.

(b) Zeigen Sie, dass beide charakteristischen Felder linear degeneriert sind und dass in jedem Feld die Integralkurven und der Hugoniot-Loci übereinstimmen. Plotten Sie die Integralkurven der beiden charakteristischen Felder in der $q-u$ Ebene.

Aufgabe 41: Betrachten Sie die Euler Gleichungen in konservativer Form

$$\begin{aligned} \rho_t + (\rho u)_x &= 0, \\ (\rho u)_t + (\rho u^2 + p)_x &= 0, \qquad (1) \\ E_t + ((E+p)u)_x &= 0, \end{aligned}$$

wobei ρ Dichte, u Geschwindigkeit, p Druck, $E = \frac{p}{\gamma-1} + \frac{1}{2}\rho u^2$ totale Energie pro Volumeneinheit eines idealen Gases, γ Verhältnis spezifischer Temperaturen, ρe innere Energie pro Volumeneinheit, $e = e(p, \rho)$ innere Energie pro Masseneinheit, $\frac{1}{2}\rho u^2$ kinetische Energie.

(a) Leiten Sie aus (1) die Euler Gleichungen in primitiver Form her:

$$\begin{pmatrix} \rho \\ u \\ p \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} u & \rho & 0 \\ 0 & u & 1/\rho \\ 0 & \gamma p & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho \\ u \\ p \end{pmatrix}_x = 0. \tag{2}$$

(b) Berechnen Sie für (2) die charakteristischen Felder und überprüfen Sie auf echte Nichtlinearität und lineare Degeneriertheit.

Abgabe am 16. Januar 2020 am Beginn der Vorlesung.
Besprechung in der Übung am 23. Januar 2020.