Mathematisches Institut

Prof. Dr. Christiane Helzel
Sina Dahm

12. Dezember 2019

Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Numerische Verfahren hyperbolischer Erhaltungsgleichungen – 10. Übungsblatt

Aufgabe 35:
Benutzen Sie Ihr Programm aus Aufgabe 33, um die experimentelle Konvergenzrate von p und u zu bestimmen. Verwenden Sie die Anfangsdaten

$$p(x,0) = \sin(2\pi x), \quad u(x,0) = 0$$

auf dem Gebiet $[0,1]$ mit periodischen Randbedingungen und Endzeit $T = 2$ sowie $u_0 = 0$. Denken Sie daran, die exakte Lösung korrekt auszurechnen. Prüfen Sie die Konvergenzrate ohne und mit Limiter.

Aufgabe 36:
Sei

$$C_{i-1}^n = \gamma + \frac{1}{2}\gamma(1-\gamma)\left(\frac{\phi(\theta_{i+1/2}^n)}{\theta_{i+1/2}^n} - \phi(\theta_{i-1/2}^n)\right).$$

Zeigen Sie, dass aus

$$0 \leq \gamma \leq 1$$

und

$$\left|\frac{\phi(\theta_1)}{\theta_1} - \phi(\theta_2)\right| \leq 2 \quad \forall \theta_1, \theta_2$$

folgt, dass

$$0 \leq C_{i-1}^n \leq 1.$$

Aufgabe 37:
Stellen Sie die beiden Wellenlimiter für das hochauflösende Verfahren für die Akustikgleichungen mit variablen Koeffizienten aus dem Artikel *High-resolution finite-volume methods for acoustic waves in periodic and random media* vor und vergleichen Sie sie. Den Artikel können Sie unter *https://asa.scitation.org/doi/pdf/10.1121/1.428038?class=pdf* aus dem Universitätsnetz einsehen.

Aufgabe 38:
Betrachten Sie die Akustikgleichungen mit variablen Koeffizienten, d.h.

$$\begin{pmatrix} p \\ u \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} 0 & K(x) \\ 1/\rho(x) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ u \end{pmatrix}_x = 0$$

Verändern Sie Ihr Programm aus Aufgabe 33, um das hochauflösende Verfahren für diese Gleichungen zu implementieren.
Die Fluktuationen sind gegeben durch

$$\mathcal{A}^- \Delta Q_{i-1/2} = s_{i-1/2}^1 \mathcal{W}_{i-1/2}^1$$

sowie

$$\mathcal{A}^+\Delta Q_{i-1/2} = s^2_{i-1/2}\mathcal{W}^2_{i-1/2}$$

mit den Wellen

$$\mathcal{W}^p_{i-1/2} = \alpha^p_{i-1/2} r^p_{i-1/2}, \quad p = 1,2$$

und den Eigenvektoren

$$r^1_{i-1/2} = \begin{pmatrix} -Z_{i-1} \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$r^2_{i-1/2} = \begin{pmatrix} Z_i \\ 1 \end{pmatrix},$$

Außerdem sind

$$s^1_{i-1/2} = -c_{i-1} = -c(x_{i-1}), \quad s^2_{i-1/2} = c_i = c(x_i)$$

die zellzentrierten Geschwindigkeiten. Der Vektor α ist durch

$$\alpha = R^{-1}_{i-1/2}(q_r - q_l)$$

gegeben, wobei $R_{i-1/2}$ sich aus den beiden Eigenvektoren zusammensetzt.
Z_i ist durch

$$Z_i = Z(x_i) \quad \forall i$$

gegeben.
Im Korrekturterm müssen Sie ebenso die Geschwindigkeiten $s^p_{i-1/2}$ einsetzten sowie den Glattheitsfaktor $\theta^p_{i-1/2}$ durch die Projektion

$$\theta^p_{i-1/2} = \frac{\mathcal{W}^p_{I-1/2} \cdot \mathcal{W}^p_{i-1/2}}{\mathcal{W}^p_{i-1/2} \cdot \mathcal{W}^p_{I-1/2}}$$

ersetzen. I wird wie gewohnt durch das Vorzeichen der Geschwindigkeit $s^p_{i-1/2}$ bestimmt.

Testen Sie Ihr Programm auf dem Gebiet $[-5, 5]$, den Anfangsdaten

$$p(x,0) = 2\exp(-5(x+2)^2)\cos(-x)$$

$$u(x,0) = p(x,0)$$

und den Koeffizienten

$$K(x) = \begin{cases} 16 : x < 0 \\ 0 : x > 0 \end{cases}$$

$$\rho(x) = \begin{cases} 1 : x < 0 \\ 0.5 : x > 0 \end{cases}$$

Führen Sie auch hier eine Konvergenzstudie mit und ohne Limiter zum Zeitpunkt $T = 6$ durch. Die ghost cells können Sie für dieses Beispiel mit konstant fortgesetzten Daten aus den Randzellen füllen. Die hier unbekannte exakte Lösung können Sie durch eine sehr fein berechnete numerische Lösung ersetzen.

Abgabe am 19. Dezember 2019 am Beginn der Vorlesung.
Besprechung in der Übung am 9. Januar 2020.