MATHEMATISCHES INSTITUT

PROF. DR. CHRISTIANE HELZEL
SINA DAHM

10. OKTOBER 2019

Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Numerische Verfahren hyperbolischer Erhaltungsgleichungen – 1. Übungsblatt

Aufgabe 1: Betrachten Sie die Wärmeleitungsgleichung mit periodischen Randbedingungen

$$\begin{array}{lcll} \partial_t q(x,t) & = & \kappa \partial_{xx} q(x,t) & (\kappa > 0), \\ q(x,0) & = & q_0(x), & \forall x \in \mathbb{R}, \\ q(x+1,t) & = & q(x,t), & \forall x \in \mathbb{R}. \end{array} \tag{1}$$

Zur Diskretisierung der Wärmeleitungsgleichung auf dem Intervall $[0,1]$ betrachten Sie äquidistante Stützstellen $0 = x_{-1/2}, ..., x_{I-1/2} = 1$ mit $x_{i-1/2} = ih$, $h = 1/I$, $I \in \mathbb{N}$, und eine konstante Zeitschrittweite k. Die Approximation des Zellmittelwertes ist gegeben durch

$$Q_i^n := \frac{1}{h} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q(x, nk) dx.$$

Die diskrete Periodizitätsbedingung hat die Form $Q_{i+1}^n = Q_i^n \ \forall i, n$.

(a) Implementieren Sie die folgenden numerischen Verfahren:

- Zentrierte Differenzen und expliziter Euler:

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n + \frac{k}{h^2} \kappa (Q_{i-1}^n - 2Q_i^n + Q_{i+1}^n)$$

- Zentrierte Differenzen und Trapezregel *(Crank-Nicolson)*:

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n + \frac{k}{2h^2} c(Q_{i-1}^n - 2Q_i^n + Q_{i+1}^n + Q_{i-1}^{n+1} - 2Q_i^{n+1} + Q_{i+1}^n + 1)$$

Zur Bestimmung des Startwertes Q_i^0 können Sie die Mittelpunktregel verwenden.

(b) Betrachten Sie das AWP (1) mit Koeffizient $\kappa = 0.04$, Anfangsdaten

$$q(x,0) = \begin{cases} 0 : x \in [0,1] \setminus [0.6, .08] \\ 1 : 0.6 \leq x \leq 0.8 \end{cases}$$

und der Periodizitätsbedingung $q(t, x+1) = q(t,x) \ \forall x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}^+$.
Wenden Sie die beiden Verfahren auf dieses AWP an und stellen Sie die numerischen Ergebnisse zum Zeitpunkt $t = 1$ und $t = 2$ graphisch dar. Verwenden Sie zur Diskretisierung verschiedene Gitterweiten, z.B. $I = 50$, $I = 100$ und $I = 200$.

Aufgabe 2: Betrachten Sie auf $\Omega = \mathbb{R} \times [0, \infty)$ die Advektionsgleichung mit periodischen Randbedingungen

$$\begin{array}{lcll} \partial_t q(x,t) + c\partial_x q(x,t) & = & 0, & c > 0, \\ q(x,0) & = & q_0(x), & \forall x \in \mathbb{R}, \\ q(x+1,t) & = & q(x,t), & \forall x \in \mathbb{R}. \end{array} \tag{2}$$

Zur Diskretisierung der Advektionsgleichung auf dem Intervall $[0,1]$ betrachten Sie äquidistante Stützstellen $0 = x_{-1/2}, ..., x_{I-1/2} = 1$ mit $x_{i-1/2} = ih$, $h = 1/I$, $I \in \mathbb{N}$, und eine konstante Zeitschrittweite k. Die Approximation des Zellmittelwertes ist gegeben durch

$$Q_i^n := \frac{1}{h} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q(x, nk) dx.$$

Die diskrete Periodizitätsbedingung hat die Form $Q_{i+1}^n = Q_i^n \; \forall i, n$.

(a) Implementieren Sie die folgenden numerischen Verfahren in Erhaltungsform:

- Das Upwind-Verfahren:
$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{k}{h} c(Q_i^n - Q_{i-1}^n)$$
- Das implizite Upwind-Verfahren:
$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{k}{h} c(Q_i^{n+1} - Q_{i-1}^{n+1})$$

Die Mittelpunktregel kann zur Bestimmung der Startwerte Q_i^0 verwendet werden.

(b) Betrachten Sie das AWP (2) mit Advektionsgeschwindigkeit $c = 2$, Anfangsdaten

$$q(x,0) = \begin{cases} 0 : x \in [0,1] \setminus [0.6, .08] \\ 1 : 0.6 \leq x \leq 0.8 \end{cases}$$

und der Periodizitätsbedingung $q(t, x+1) = q(t, x) \; \forall x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}^+$.

Wenden Sie das Upwind-Verfahren und das implizite Upwind-Verfahren auf dieses AWP an und stellen Sie die numerischen Ergebnisse der beiden Verfahren zum Zeitpunkt $t = 1$ und $t = 2$ gemeinsam mit der exakten Lösung graphisch dar. Verwenden Sie zur Diskretisierung verschiedene Gitterweiten, z.B. $I = 50$, $I = 100$ und $I = 200$. Wählen Sie die Zeitschritte so, dass $k = 0.1h/c$, $k = 0.5h/c$, $k = 0.9h/c$ und $k = h/c$ gilt.

(c) Betrachten Sie das AWP (2) mit Advektionsgeschwindigkeit $c = 1$, Anfangsdaten

$$q(x,0) = e^{-\beta(x-0.5)^2} \cdot \sin(fx), \quad \beta = 100, \quad f = 80 \quad \text{für } x \in [0,1],$$

und der Periodizitätsbedingung $q(x+1, t) = q(x, t) \; \forall x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}^+$.
Stellen Sie auch für diese Anfangsdaten die numerische Lösung der beiden Verfahren zum Zeitpunkt $t = 1$ zusammen mit der exakten Lösung graphisch dar.

Aufgabe 3: Betrachten Sie die Advektions-Diffusionsgleichung

$$\begin{aligned} \partial_t q(x,t) + c\partial_x q(x,t) &= \epsilon \partial_{xx} q(x,t) && \forall x \in \mathbb{R}, t > 0, \epsilon > 0 \\ q(x,0) = q_0(x) &= e^{-\beta x^2} && \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{3}$$

und bestimmen Sie die analytische Lösung.

Hinweis: Nach einer Fouriertransformation der Wärmeleitungsgleichung können Sie die folgende gewöhnliche Differentialgleichung lösen:

$$\begin{aligned} \hat{q}_\tau(\zeta, \tau) &= -\epsilon \zeta^2 \hat{q}(\zeta, \tau) && \zeta \in \mathbb{R}, \tau > 0, \epsilon > 0 \\ \hat{q}(\zeta, 0) &= \hat{q}_0(\zeta) && \zeta \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Abgabe am 17. Oktober 2019 am Beginn der Vorlesung.
Besprechung in der Übung am 21. Oktober 2019.