MATHEMATISCHES INSTITUT

PROF. DR. CHRISTIANE HELZEL
SINA DAHM

5. DEZEMBER 2018

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Numerik II – 9. Übungsblatt

Aufgabe 31:

Seien $A, X \in \mathbb{K}^{n\times n}$ und X nicht singulär. Zeigen Sie, dass A und $X^{-1}AX$ die gleichen Eigenwerte haben. Wie sind die Eigenvektoren von $X^{-1}AX$ gegeben?

Aufgabe 32: Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch, (λ, x) eine Näherung an einen Eigenwert und den zugehörigen Eigenvektor mit $\|x\| = 1$ und dem Residuum $\eta := Ax - \lambda x$. Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ die Eigenwerte von A. Dann gilt:

$$\min_i |\lambda - \lambda_i| \leq \|\eta\|_2.$$

Aufgabe 33: Zeigen Sie, dass das Eigenwertproblem für symmetrische Matrizen gut konditioniert ist.

Aufgabe 34: Sei

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & \varepsilon \\ 0 & \varepsilon & 1 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon \in \mathbb{R},\ |\varepsilon| < 1.$$

Geben Sie unter Verwendung von Gerschgorins Theorem eine Abschätzung für die Eigenwerte an. Zeigen Sie, dass für den kleinsten Eigenwert eine Abschätzung der Form $|\lambda - 1| \leq \varepsilon^2$ gilt.

Hinweis: Finden Sie eine geeignete Ähnlichkeitstransformation.

Aufgabe 35: **(Zusatzaufgabe)**

(a) Seien $x, y \in \mathbb{C}^{n+1}$ (periodisch fortgesetzt). Die Faltung $x \star y \in \mathbb{C}^{n+1}$ ist definiert durch

$$(x \star y)_k = \sum_{j=0}^{n} x_{k-j} y_j, \quad k = 0, ..., n.$$

Beweisen Sie den Faltungssatz:

$$\frac{1}{n+1} c_k^{x \star y} = c_k^x c_k^y, \quad \forall k,$$

wobei c_k^z den $k-$ten zu $z_0, ..., z_n$ gehörigen Fourier-Koeffizienten bezeichnet.

(b) Schreiben Sie ein effizientes Programm zur Approximation von

$$f(x) = \int_0^{2\pi} \sin^2(t) \cos^2(x-t) dt$$

für $x \in [0, 2\pi]$ unter Verwendung der FFT. Vergleichen Sie ihr Ergebnis für verschiedene Werte von n mit der exakten Lösung

$$f(x) = -\frac{1}{4}\pi(\cos(2x) - 2).$$

Stellen Sie die exakte Lösung und die approximative Lösung graphisch dar.

Die Zusatzaufgabe kann bis zum 19. Dezember 2018 abgegeben werden.

Abgabe am 12. Dezember 2018 am Beginn der Vorlesung.
Besprechung in den Übungen ab 19. Dezember 2018.