Mathematisches Institut

Prof. Dr. Christiane Helzel
Sina Dahm

21. November 2018

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Numerik II – 7. Übungsblatt

Aufgabe 23: Betrachten Sie

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit dem GMRES-Verfahren.

Aufgabe 24: Auf die Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $\det A \neq 0$, werde der GMRES-Algorithmus angewendet. Zeigen Sie: Wird A für $\sigma \in \mathbb{R}$ zu σA und b zu σb verändert, wird das Residuum $r^{[k]}$ zu $\sigma r^{[k]}$.

Aufgabe 25: Betrachten Sie das $2D$ Poisson-Problem

$$\Delta u(x, y) = f(x, y), \quad 0 < x, y < 1$$

mit Dirichlet Randbedingungen aus Aufgabe 7. Wir wollen hier das LGS $Ax = b$ mit $b = (1, 1, ..., 1)^T$ lösen und dabei das CG-Verfahren mit dem GMRES-Verfahren vergleichen.

(a) Implementieren Sie das GMRES-Verfahren. Zur Lösung des ”least squares” Problems können Sie eine vorgefertigte Routine verwenden.

(b) Lösen Sie das LGS mit dem CG-und GMRES -Verfahren und stellen Sie die Fehlerabschätzungen als Funktion der Anzahl der Iterationen in einem gemeinsamen Plot dar.

(c) Kehren sie nun die Vorzeichen aller Einträge in A unterhalb der Diagonalen um und wiederholen sie (b).

(d) Lassen sie sich auch jeweils den tatsächlichen Fehler nach 100 Iterationen ausgeben.

Aufgabe 26: Wir betrachte das lineare Gleichungssystem $Ax = b$. Es seien H und Q die im Arnoldi-Prozess bestimmten Matrizen. Zeigen Sie: Falls $A = A^T$, dann muss $v = Aq_k$ nur zu den zwei vorherigen Basisvektoren q_k und q_{k-1} orthogonalisiert werden.

Abgabe am 28. Dezember 2018 am Beginn der Vorlesung.
Besprechung in den Übungen ab 5. Dezember 2018.