

## Numerik II – 6. Übungsblatt

**Aufgabe 19:** Zeigen Sie, dass das CG-Verfahren in die effiziente Form von Algorithmus 2.24 überführt werden kann, d.h. zeigen Sie

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & d_{k-1}^T r^{[k-1]} = (r^{[k-1]})^T r^{[k-1]}, \\ \text{(ii)} \quad & r^{[k-1]} - \alpha_{k-1}^* w_{k-1} = b - Ax^{[k]}, \\ \text{(iii)} \quad & -\frac{(r^{[k]})^T Ad_{k-1}}{d_{k-1}^T Ad_{k-1}} = \frac{(r^{[k]})^T r^{[k]}}{(r^{[k-1]})^T r^{[k-1]}}. \end{aligned}$$

**Aufgabe 20:** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  symmetrisch positiv definit. Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned} \|x\|_A : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \|x\|_A := \sqrt{x^T Ax} \end{aligned}$$

eine Norm definiert, die als Energienorm bezeichnet wird.

**Aufgabe 21:** Die Messung eines Signals der Form

$$f(x) = \beta_0 x^3 + \beta_1 x^2 + \beta_2 x + \beta_3$$

liefert folgende Tabelle:

$x_i$	0	2	4	1	0	3	0	1	2
$f(x_i)$	3	65	367	16	3	172	1	14	63

Verwenden Sie die Methode der kleinsten Fehlerquadrate zur optimalen Bestimmung von  $\beta_j$ ,  $j = 0, \dots, 3$ .

- Geben Sie das entsprechende lineare Ausgleichproblem an.
- Stellen Sie die Normalgleichung  $A^T Ax = A^T b$  auf.
- Verwenden Sie das Programm aus Aufgabe 18, um die Normalgleichung  $A^T Ax = A^T b$  mit Hilfe des CG-Verfahrens zu lösen.

Was ist die Kondition der Matrix  $A^T A$ ?

**Aufgabe 22:** Schreiben Sie ein Programm zur iterativen Lösung eines linearen Gleichungssystems  $Ax = b$ , mit  $A$  spd. unter Verwendung des vorkonditionierten CG-Verfahrens.

Sei  $A = D - L - L^T$ . Betrachten Sie die folgenden Vorkonditionierer:

- $M = D$  (Jacobi-Vorkonditionierer)
- $M = B_1 \cdot B_2$  mit  $B_1 = \frac{1}{\omega}(D - \omega L)$  und  $B_2 = \frac{1}{\omega}(D - \omega R)$  (symmetrischer SOR-Vorkonditionierer)
- $M = Id$  (Standard CG-Verfahren ohne Vorkonditionierung)

Testen Sie die Verfahren für die linearen Gleichungssysteme aus Aufgabe 11 und Aufgabe 18. Stellen Sie den Fehler (d.h.  $\|r^{[k]}\|_2$ ) als Funktion der Iterationen  $k$  dar. Die Größe der Gleichungssysteme sowie die Wahl des Relaxationsparameters können Sie beliebig wählen.

**Abgabe am 21. November 2018 am Beginn der Vorlesung.  
Besprechung in den Übungen ab 28. November 2018.**