

Numerik II – 5. Übungsblatt

Aufgabe 15: Zeigen Sie, dass für das Längenverhältnis zwischen Haupt und Nebenachse einer Ellipse

$$\frac{\|x_1 - x^*\|_2}{\|x_2 - x^*\|_2} = \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} = \sqrt{\kappa_2(A)}$$

mit $\lambda_1 \leq \lambda_2$ gilt.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst

$$\|x_j - x^*\|_2^2 = \frac{2 + (x^*)^T A x^*}{\lambda_j}, \quad j = 1, 2.$$

Aufgabe 16: Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch und positiv definit, sei $b \in \mathbb{R}^n$, sei $x^{[0]} \in \mathbb{R}^n$, und seien $d_0, d_1, \dots, d_{n-1} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ A-konjugiert. $x^{[1]}, \dots, x^{[n]}$ seien mit Algorithmus 2.16 berechnet.

Zeigen Sie: Es gilt $(r^{[j]})^T d_i = 0$ für alle $j \in \{0, \dots, n-1\}$, $i = 0, 1, \dots, j-1$.

Aufgabe 17: Gegeben seien der Vektor $b = (1, 1, 1)^T$ und die Matrizen

$$(i) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -10 \\ -1 & 2 & 0 \\ -10 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad (ii) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

- (a) Was sind die Voraussetzungen an A , damit das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit der Methode des Konjugierten Gradienten (CG) gelöst werden kann? Ist das CG-Verfahren in den Fällen (i), (ii) anwendbar?
- (b) Falls das CG-Verfahren in (i) oder (ii) anwendbar ist, lösen Sie das Gleichungssystem $Ax = b$ mit dem CG-Verfahren. Verwenden Sie den Nullvektor als Startvektor.

Aufgabe 18: Wir betrachten die Lösung des linearen Gleichungssystems

$$Ax = b.$$

Auf der Diagonalen der Matrix $A \in \mathbb{R}^{100 \times 100}$ stehen die Zahlen $1, 2, \dots, 100$, auf beiden Nebendiagonalen stehen Einsen. Weiter sei $b = (1, 1, \dots, 1)^T$ und $x^{[0]} = 0$ eine erste Näherung an die Lösung. Schreiben Sie ein Programm zur Lösung des linearen Gleichungssystems unter Verwendung der Methode des steilsten Abstiegs und des CG-Verfahrens.

- Führen Sie je 100 Iterationen mit der Methode des steilsten Abstiegs und mit dem CG-Verfahren durch.
- Stellen Sie das Residuum als Funktion von der Anzahl der Iterationen in einen gemeinsamen Graph dar.

Abgabe am 14. November 2018 am Beginn der Vorlesung.
Besprechung in den Übungen ab 21. November 2018.