MATHEMATISCHES INSTITUT

PROF. DR. CHRISTIANE HELZEL
SINA DAHM

24. OKTOBER 2018

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Numerik II – 3. Übungsblatt

Aufgabe 8: Für welche $\phi \in \mathbb{R}$ konvergieren das Jacobi- und das Gauß-Seidel-Verfahren für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & \phi \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 9: Lösen Sie das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 4x_1 + x_2 &= 6 \\ 2x_1 + 3x_2 &= 8 \end{aligned}$$

mit dem Jacobi-Verfahren bis zu einer Genauigkeit von 10^{-2}. Benutzen Sie den Nullvektor als Startvektor. Wie viele Iterationen werden benötigt, um eine Genauigkeit von 10^{-8} zu erhalten.

Aufgabe 10: Sei $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ eine invertierbare Matrix. Zeigen Sie, dass das Gauß-Seidel-Verfahren genau dann konvergiert, wenn das Jacobi-Verfahren konvergiert.

Aufgabe 11: Betrachten Sie das Randwertproblem

$$u''(x) = f(x), \quad 0 < x < 1$$
$$u(0) = 1, \ u(1) = 3$$

mit

$$f(x) = -20 + a\phi''(x)\cos(\phi(x)) - a\left(\phi'(x)\right)^2 \sin(\phi(x)), \ a = 0.5, \ \phi(x) = 20\pi x^3.$$

Die exakte Lösung lautet

$$u(x) = 1 + 12x - 10x^2 + a\sin(\phi(x)).$$

Verwenden Sie zunächst Ihr Programm aus Aufgabe 4, um das Randwertproblem für $m = 200$ numerisch zu lösen.

Ersetzen Sie nun in Ihrem Programm die Lösung des linearen Gleichungssystems durch das

1. Jacobi-Verfahren
2. Gauß-Seidel-Verfahren
3. SOR-Verfahren mit $\omega = 2/(1 + \sin(\pi h))$, $h = 1/(m + 1)$.

Verwenden Sie als Startwert für die Iteration die Werte $U_i^{[0]} = 1 + 2ih$ für $i = 1, \ldots, m$.

Stellen Sie nach 10, 100, 1000 Iterationen die exakte und approximative Lösung des RWPs sowie den Fehler graphisch dar.

Erzeugen Sie zusätzlich eine Abbildung, in der Sie den Fehler $U^{[k]} - U^*$ als Funktion von k für alle drei Iterationsverfahren graphisch darstellen. (U^* sei dabei der exakte Löser des LGS.)

Hinweis: Für das SOR Verfahren gilt

$$
\begin{aligned}
M &= \frac{1}{\omega}\,(D - \omega L) \\
N &= \frac{1}{\omega}\,((1-\omega)D + \omega R)
\end{aligned}
$$

Abgabe am 31. Oktober 2018 am Beginn der Vorlesung.
Besprechung in den Übungen ab 7. November 2018.