Mathematisches Institut

Prof. Dr. Christiane Helzel
Sina Dahm

17. Oktober 2018

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Numerik II – 2. Übungsblatt

Aufgabe 5:

(a) Lösen Sie das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 10x_1 - 4x_2 - 2x_3 &= 2 \\ -4x_1 + 10x_2 - 4x_3 &= 3 \\ -6x_1 - 2x_2 + 12x_3 &= 1 \end{aligned}$$

mit dem Jacobi-Verfahren und mit dem Gauß-Seidel-Verfahren. Benutzen Sie den Nullvektor als Startvektor. Geben Sie für beide Verfahren die Lösung nach 3 Iterationen an. Welches Verfahren liefert nach 3 Iterationen eine genauere Lösung?

(b) Konvergieren das Gauß-Seidel-Verfahren und das Jacobi-Verfahren zur Lösung des linearen Gleichungssystems?

Aufgabe 6: Beweisen Sie die folgende Aussage:

Sei $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\|\cdot\|$ eine einer Vektornorm $\|\cdot\|$ zugeordnete Matrixnorm. Dann gilt

$$\rho(C) \leq \|C\|.$$

Aufgabe 7:

(a) Schreiben Sie ein Matlab Programm zur Lösung des zweidimensionalen Poisson-Problems

$$\Delta u(x,y) = f(x,y) \quad 0 < x, y < 1$$

mit Dirichlet Randbedingungen. Verwenden Sie den in der Vorlesung eingeführten 5-Punkte-Stern auf einem äquidistanten Gitter.

Testen Sie Ihr Programm für die rechte Seite

$$f(x,y) = \frac{5}{4} e^{x+y/2}$$

und die Randbedingungen

$$u|_{\partial\Omega} = e^{x+y/2}.$$

Benutzen Sie eine vorhandene Python oder Matlab Routine, um das lineare Gleichungssystem exakt zu lösen. Geben Sie für $m = 50$, 100 und 200 den Fehler in der Max-Norm an, indem Sie die Gitterfunktion der numerischen Lösung mit der Gitterfunktion der exakten Lösung des Poisson Problems vergleichen. Erstellen Sie einen Contour Plot der numerischen Lösung auf einem Gitter mit 50×50 Gitterpunkten.

Hinweis: Die exakte Lösung ist $u(x,y) = e^{x+y/2}$.

(b) Vergleichen Sie für $m = 20, 40$ und 60 die iterativ berechneten Lösungen mit der exakten Lösung des linearen Gleichungssystem aus Teil (a). Erstellen Sie für die verschiedenen Werte von m jeweils einen Plot, in dem Sie den Fehler in der Max-Norm als Funktion der Anzahl der verwendeten Iterationen abtragen. Verwenden Sie als Startwert für die iterativen Verfahren $U_{ij}^{[0]} = 1 \ \forall i, j$.

Vergleichen Sie in gleicher Weise für $m = 20, 40$ und 60 die iterativ berechneten Lösungen mit der Gitterfunktion der exakten Lösung des Randwertproblems.

Geben Sie auch einen Ausdruck Ihres erstellten Programms mit ab.

Abgabe am 24. Oktober 2018 am Beginn der Vorlesung.
Besprechung in den Übungen ab 31. Oktober 2018.