Mathematisches Institut

Prof. Dr. Christiane Helzel
Sina Dahm

16. Januar 2019

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Numerik II – 13. Übungsblatt

Aufgabe 45: Beweisen Sie Lemma 4.22 aus der Vorlesung.

Aufgabe 46: Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische Tridiagonalmatrix

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & & 0 \\ b_1 & & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ 0 & & b_{n-1} & a_n \end{pmatrix}.$$

mit $b_i \neq 0$, $i = 1, \dots, n-1$.

Die Polynome $p_i \in \mathbb{P}_i$ seien nach der Rekursionsformel

$$\begin{aligned} &p_0(z) = 1, \quad p_1(z) = a_1 - z \\ &p_i(z) = (a_i - z)p_{i-1}(z) - b_{i-1}^2 p_{i-2}(z), \quad i = 2, \dots, n \end{aligned}$$

bestimmt.

Es sei λ ein Eigenwert von A. Zeigen Sie, dass der zugehörige Eigenvektor gegeben ist durch $w(\lambda)$, mit

$$w(z) = \begin{pmatrix} w_0(z) \\ \vdots \\ w_{n-1}(z) \end{pmatrix}$$

mit

$$\begin{aligned} &w_0(z) = 1 \\ &w_i(z) = \frac{(-1)^i p_i(z)}{b_1 \dots b_i}, \quad i = 1, \dots, n, \quad b_n := 1. \end{aligned}$$

Aufgabe 47:

(a) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tridiagonal und symmetrisch, wobei die Einträge ober- und unterhalb der Diagonalen ungleich Null sind. Zeigen Sie, dass die Eigenwerte von A paarweise verschieden sind.

(b) Beweisen Sie die folgenden Aussagen :

- Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und $A(k)$ die $k \times k$ Hauptabschnittsmatrix von A, dann gilt:

$$\lambda_j^{(k+1)} \leq \lambda_j^{(k)} \leq \lambda_{j+1}^{(k+1)} \quad k = 1, .., n-1, j = 1, .., k,$$

wobei $\lambda_1^{(k)}, ..., \lambda_k^{(k)}$ die Eigenwerte der Matrix A(k) sind.

- Sei $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine unzerlegbare, symmetrische Tridiagonalmatrix, dann gilt:

$$\lambda_j^{(k+1)} < \lambda_j^{(k)} < \lambda_{j+1}^{(k+1)} \quad k = 1, .., n-1, j = 1, .., k.$$

Hinweis:
Seien $u_1, ..., u_n$ die orthogonalen Eigenvektoren der Matrix A zu den Eigenwerten $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_n$, dann gilt:

$$\frac{u^T Au}{u^T u} \geq \lambda_i \qquad \text{für } u \in \langle u_i, ..., u_n \rangle,$$
$$\frac{u^T Au}{u^T u} \leq \lambda_i \qquad \text{für } u \in \langle u_1, ..., u_i \rangle.$$

Aufgabe 48: Bestimmen Sie mit Hilfe des in Abschnitt 4.7 eingeführten Verfahrens die Anzahl der Eigenwerte der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

im Intervall $[1, 2]$.

Abgabe am 23. Januar 2019 am Beginn der Vorlesung.
Besprechung in den Übungen ab 30. Februar 2019.