

## Numerik II – 11. Übungsblatt

**Aufgabe 40:** (Zusatzaufgabe) Wir betrachten ein Gebiet  $G$  in der Ebene  $\mathbb{R}^2$ , in welchem eine ideale elastische Membran liegt, die am Rand fest eingespannt ist. Wir wollen die kleinste Eigenfrequenz der Membran bestimmen. Die Schwingung der Membran wird beschrieben durch das Eigenwert-Problem

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \lambda u \quad \text{für } (x, y) \in G,$$
$$u(x, y) = 0 \quad \text{für } (x, y) \in \partial G$$

Das Gebiet  $G \in \mathbb{R}^2$  sei ein Achteck mit den Ecken:  $(1, 3), (1, 5), (3, 7), (5, 7), (7, 5), (7, 3), (5, 1), (3, 1)$ . Diskretisieren Sie das Eigenwertproblem auf diesem Gebiet mit Gitterweite  $h$  unter Verwendung des 5-Punkte-Sterns des Laplace-Operators.

Implementieren Sie dazu:

- die Inverse Iteration mit Shift,
- die Rayleigh-Quotienten-Iteration,

und lösen Sie mit beiden Verfahren das resultierende Eigenwert-Problem für  $h = 2^k, k = 0, -1, -2, \dots, -6$ . Geben Sie jeweils den kleinsten Eigenwert an und erstellen Sie einen Plot der zugehörigen Eigenfunktion.

**Aufgabe 41:** (Zusatzaufgabe) Die Faltung zweier Funktionen  $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$  ist definiert durch

$$(f \star g)(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(x - \tau) d\tau.$$

Wir bezeichnen mit

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx$$

die Fourier-Transformierte von  $f$  und mit

$$\bar{f}(x) = f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi$$

die inverse Fourier-Transformierte.

(a) Beweisen Sie den Faltungssatz:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \widehat{f \star g}(t) = \hat{f}(t)\hat{g}(t)$$

(b) Folgern Sie daraus die Beziehung

$$(f \star g)(x) = \sqrt{2\pi} \widehat{\hat{f}(x)\hat{g}(x)}.$$

**Wir wünschen Ihnen ein frohes Weihnachtsfest, einen guten Rutsch und ein glückliches und erfolgreiches Jahr 2018!**

**Abgabe am 9. Januar 2019 am Beginn der Vorlesung.  
Besprechung in den Übungen ab 16. Januar 2019.**