Mathematisches Institut

Prof. Dr. Christiane Helzel
Sina Dahm

12. Dezember 2018

Numerik II – 10. Übungsblatt

Aufgabe 36: Es sei $A = A^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und

$$r(x) := \frac{x^T A x}{x^T x}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Zeigen Sie:

- Es gilt:
$$\lambda_{\min} \le r(x) \le \lambda_{\max} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$
- Es sei y_j EV zum EW λ_j. Zeigen Sie, dass
$$r(x) - r(y_j) = \mathcal{O}(\|x - y_j\|_2^2) \text{ für } x \to y_j.$$
gilt.

Aufgabe 37: Bringen Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 48 & 5 & 1 \\ 1 & 8 & 8 & 4 \\ -24 & 24 & 4 & 2 \\ -12 & 18 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

in Hessenberg-Form.

Aufgabe 38: Für die Hessenberg-Matrix

$$H = \begin{pmatrix} 2 & -5 & -13 & -25 \\ 4 & 13 & 29 & 60 \\ 0 & -2 & -15 & -48 \\ 0 & 0 & 5 & 18 \end{pmatrix}$$

berechne man mit der inversen Iteration zwei reelle Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren. Dazu verwende man einmal $\mu = 2.5$, im anderen Fall $\mu = 7.5$ und jeweils $v^{(0)} = (1,0,0,0)^T$. Iterieren Sie so lange, bis beim Eigenwert mindestens drei wesentliche Stellen unverändert bleiben.

Aufgabe 39: Betrachten Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & \beta_1 & & & 0 \\ \beta_1 & 1/2 & \beta_2 & & \\ & \beta_2 & 1/2 & \beta_3 & \\ & & \beta_3 & 1/2 & \beta_4 \\ 0 & & & \beta_4 & 1/2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{5\times 5} \text{ mit } \beta_i = \frac{i}{2\sqrt{4i^2-1}}.$$

Bestimmen Sie den betragsgrößten Eigenwert sowie den zugehörigen Eigenvektor der Matrix A mit den folgenden Algorithmen:

- Inverse Vektoriteration
- Direkte Vektoriteration
- Rayleigh-Quotienten Iteration

Bestimmen Sie mit Hilfe des Satzes von Gerschgorin einen geeigneten Wert μ für die inverse Vektoriteration. Wählen Sie für $v^{(0)}$ einen geeigneten Vektor. Stellen Sie den jeweiligen Fehler als Funktion der Anzahl der verwendeten Iterationen graphisch dar. Überlegen Sie sich ein geeignetes Maß für den Fehler.

Abgabe am 19. Dezember 2018 am Beginn der Vorlesung.
Besprechung in den Übungen ab 9. Januar 2019.