MATHEMATISCHES INSTITUT

PROF. DR. CHRISTIANE HELZEL
SINA DAHM

10. OKTOBER 2018

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Numerik II – 1. Übungsblatt

Aufgabe 1:

(a) Bestimmen Sie für die folgende Funktion alle $p \in \mathbb{N}$ mit $f(h) = \mathcal{O}(h^p)$ für $h \to 0$. Hierbei bezeichnet ln den natürlichen Logarithmus.

$$f(h) = \begin{cases} \sqrt{55}^{ln(|h|)}, & h \neq 0, \\ 0, & h = 0. \end{cases}$$

Hinweis: Es gilt $\exp(5) > 55 > \exp(4)$.

(b) Bestimmen Sie alle $p \in \mathbb{N}$, sodass

$$\begin{aligned} u'(\overline{x}) &= \frac{u(\overline{x}+h) - u(\overline{x})}{h} + \mathcal{O}(h^p) \\ u'(\overline{x}) &= \frac{3u(\overline{x}) - 4u(\overline{x}-h) + u(\overline{x}-2h)}{2h} + \mathcal{O}(h^p) \\ u'(\overline{x}) &= \frac{u(\overline{u}+h) - u(\overline{x}-h)}{2h} + \mathcal{O}(h^p) \end{aligned}$$

gilt.

Aufgabe 2: Jede Vektornorm $\|\cdot\|$ auf einem Vektorraum V induziert eine Matrixnorm (Operatornorm) durch

$$\|A\| := \max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|.$$

Sei N die Anzahl der Gitterpunkte und h der Abstand zwischen benachbarten Gitterpunkten. Es sei U eine Gitterfunktion. Zeigen Sie, dass die zu der Vektornorm

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

und der Gitterfunktionsnorm

$$\|U\|_2 = \sqrt{h\sum_{i=1}^{N} |U_i^2|}$$

zugehörige Matrixnorm gegeben ist durch

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)} \quad \text{(Spektralnorm).}$$

Aufgabe 3: Beim Aufstellen eines Finiten-Differenzen-Verfahrens mit zentrierten Differenzen und periodischen Randwertbedingungen ergibt sich die Matrix

$$A = \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} -2 & 1 & & & & & 1 \\ 1 & -2 & 1 & & & & \\ & 1 & -2 & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & 1 & -2 & 1 & 0 \\ & & & & 1 & -2 & 1 \\ 1 & & & & & 1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(m+1)\times(m+1)} \text{ für } m \geq 2.$$

Zeigen Sie, dass die Matrix A die Eigenwerte $\lambda_p = \frac{2}{h^2}(cos(2\pi ph) - 1))$ und die dazugehörigen Eigenvektoren u^p mit Komponenten $u_j^p = e^{2\pi ipjh}$ besitzt.

Aufgabe 4:

- Schreiben Sie ein Programm zur numerischen Lösung des Randwertproblems

  $$u''(x) = f(x), \quad 0 < x < 1$$

  mit Dirichlet Randbedingungen

  $$u(0) = \alpha, \quad u(1) = \beta$$

  unter Verwendung von $m + 2$ äquidistanten Gitterpunkten $x_0, x_1, \ldots, x_{m+1}$.

- Betrachten Sie das Testbeispiel:

  $$f(x) = e^{-x}\left[(1 - 100\pi^2)\sin(10\pi x) - 20\pi\cos(10\pi x)\right]/5,$$

  $\alpha = \beta = 0$ und $m = 50, 100, 200$.

- Stellen Sie für $m = 50, 100, 200$ die numerische Lösung zusammen mit der exakten Lösung

  $$u(x) = e^{-x}\sin(10\pi x)/5$$

  graphisch dar.

- Berechnen Sie für die drei verschiedenen Werte von m jeweils den Fehler in einer geeigneten Norm.

Die Abgabe sollte die drei Grafiken sowie eine Tabelle mit den Fehlern in der entsprechenden Gitterfunktionsnorm für verschiedene Werte von m umfassen.

Abgabe am 17. Oktober 2018 am Beginn der Vorlesung.
Besprechung in den Übungen ab 24. Oktober 2018.