MATHEMATISCHES INSTITUT
PROF. DR. CHRISTIANE HELZEL
DAVID KERKMANN

7. DEZEMBER 2017

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

24	25	26	27	Σ

NAME: ____________

MAT-NR.: ____________

NAME: ____________

MAT-NR.: ____________

Numerische Verfahren für hyperbolische Erhaltungsgleichungen – 8. Übungsblatt

Aufgabe 24: Beweisen Sie Lemma 2.13 der Vorlesung.

Aufgabe 25: Zeigen Sie, dass der Mittelungsprozess in einem Verfahren der Form Rekonstruktion-Evolution-Mittelung nicht zu einer Erhöhung der Totalvariation führt.

Aufgabe 26: Betrachten Sie auf $\Omega = \mathbb{R} \times [0, \infty)$ die Burgersgleichung

$$\partial_t q + \partial_x \left(\frac{q^2}{2} \right) = 0 \tag{1}$$

mit Anfangsdaten

$$q(x,0) = q_0(x) = \begin{cases} 2: & x \leq 0 \\ 1: & x > 0 \end{cases} \tag{2}$$

Berechnen Sie die numerische Lösung, indem Sie folgende Verfahren implementieren:

1. Das Godunov Verfahren.
2. Das Finite-Differenzen-Verfahren

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} Q_i^n (Q_i^n - Q_{i-1}^n). \tag{3}$$

Wählen Sie sinnvolle Parameter $T, \Delta x, \Delta t$, die wie üblich Endzeit sowie Schrittweiten in Ort und Zeit angeben, und stellen Sie ihre Lösungen jeweils mit der exakten Lösung dar.

Aufgabe 27: Betrachten Sie auf $\Omega = \mathbb{R} \times [0, \infty)$ die Erhaltungsgleichung

$$q_t + f(q)_x = 0 \tag{4}$$

mit den verschiedenen Anfangsdaten

$$u_0(x) = u(x,0) = \begin{cases} 1: & x \leq 0 \\ 0: & x > 0 \end{cases} \tag{5}$$

und

$$v_0(x) = v(x,0) = \frac{\tanh(-x) + 1}{2} \tag{6}$$

Sei $u(x,t)$ die Lösung der Erhaltungsgleichung mit Anfangswerten u_0 und $v(x,t)$ die Lösung der Erhaltungsgleichung mit Anfangswerten v_0. Zeigen Sie, dass für alle Zeiten $t > 0$, zu denen $v(x,t)$ eine klassische Lösung bleibt, gilt:

$$\frac{d}{dt} \|u(\cdot,t) - v(\cdot,t)\|_{L^1} \leq 0. \tag{7}$$

Abgabe am 14. Dezember 2017 am Beginn der Vorlesung.
Abgabe der Programmieraufgaben bis zum 14. Dezember 2017 um 14:00 an david.kerkmann@hhu.de.
Besprechung in der Übung am 22. Dezember 2017.