MATHEMATISCHES INSTITUT

PROF. DR. CHRISTIANE HELZEL
DAVID KERKMANN

30. NOVEMBER 2017

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

20	21	22	23	Σ

NAME: ____________________

MAT-NR.: ____________________

NAME: ____________________

MAT-NR.: ____________________

Numerische Verfahren für hyperbolische Erhaltungsgleichungen – 7. Übungsblatt

Aufgabe 20: Zeigen Sie, dass die numerische Flussfunktion des Godunov Verfahrens, angewandt auf die Burgersgleichung, die Form

$$F_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \begin{cases} \min_{Q_{i-1}^n \leq q \leq Q_i^n} f(q) & : \quad Q_{i-1}^n \leq Q_i^n \\ \max_{Q_i^n \leq q \leq Q_{i-1}^n} f(q) & : \quad Q_i^n \leq Q_{i-1}^n \end{cases}$$

hat.

Aufgabe 21: Sei η eine Funktion, die auf $\{q(x) \mid x_{i-1/2} \leq x \leq x_{i+1/2}\}$ konvex ist. Beweisen Sie, dass

$$\eta\left(\frac{1}{\Delta x}\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} q(x)dx\right) \leq \frac{1}{\Delta x}\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \eta(q(x))dx$$

gilt.

Aufgabe 22: Sei $x_j := j\Delta x$, $\operatorname{supp}(q_0) = [-M, M]$ und

$$Q_j^0 := \frac{1}{\Delta x}\int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} q_0(x)dx.$$

Weiterhin sei $\mathcal{F} \in C^{0,1}(\mathbb{R}^2)$ ein numerischer Fluss und Q_j^n, $n \geq 1$ durch das Verfahren

$$Q_j^{n+1} = Q_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(\mathcal{F}(Q_j^n, Q_{j+1}^n) - \mathcal{F}(Q_{j-1}^n, Q_j^n)\right)$$

gegeben.

Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Erhaltungseigenschaft

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} Q_j^{n+1} = \sum_{j\in\mathbb{Z}} Q_j^n$$

gilt.

Aufgabe 23: In der Voraussetzung des Satzes von Lax-Wendroff wurde in der Vorlesung die Konvergenz in der 1-Norm sowie die Beschränkung der Totalvariation angegeben. In dem Originalartikel *Systems of Conservation Laws* wird eine andere Voraussetzung angegeben. Lesen Sie den entsprechenden Teil des Artikels und geben Sie die dort angegebenen Voraussetzungen an. Sie können den Artikel unter *http://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/cpa.3160130205/pdf* aus dem Universitätsnetz einsehen. Bestimmen Sie eine Beziehung zwischen den beiden Voraussetzungen, d.h. untersuchen Sie die zwei Aussagen auf Implikationen und Äquivalenz. Beschränken Sie sich auf den Fall skalarer Erhaltungsgleichungen.

Abgabe am 7. Dezember 2017 am Beginn der Vorlesung.
Besprechung in der Übung am 15. Dezember 2017.