Mathematisches Institut

Prof. Dr. Christiane Helzel
David Kerkmann

23. November 2017

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

16	17	18	19	Σ

Name: ____________

Mat-nr.: ____________

Name: ____________

Mat-nr.: ____________

Numerische Verfahren für hyperbolische Erhaltungsgleichungen – 6. Übungsblatt

Aufgabe 16: Beweisen Sie Satz 1.23 der Vorlesung.

Satz 1.23: Sei q eine schwache Lösung von (1) und S eine glatte Kurve in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, entlang derer q unstetig ist.

Seien $f, \eta, F \in C^2(\mathbb{R})$, $f'' > 0$, $\eta'' > 0$ und F erfülle $F' = \eta' f'$. Sei weiter q eine Entropielösung im Sinne von Definition 1.22.

Dann erfüllt q an allen Unstetigkeitsstellen die Lax-Entropiebedingung.

Siehe Kröner, Numerical Schemes for Conservation Laws.

Aufgabe 17: Schreiben Sie ein Programm zur Approximation der Burgersgleichung mit periodischen Anfangsdaten mittels

- Lax-Friedrichs Verfahren

$$Q_i^{n+1} = \frac{1}{2}\left(Q_{i-1}^n + Q_{i+1}^n\right) - \frac{\Delta t}{2\Delta x}\left(f(Q_{i+1}^n) - f(Q_{i-1}^n)\right)$$

- Richtmyer 2-Schritt Lax-Wendroff Verfahren.

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(F_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - F_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}\right)$$

mit

$$Q_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left(Q_{i-1}^n + Q_i^n\right) - \frac{\Delta t}{2\Delta x}\left(f(Q_i^n) - f(Q_{i-1}^n)\right)$$
$$F_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = f(Q_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}})$$

Testen Sie Ihr Programm für verschiedene Anfangsdaten.

b.w.

Aufgabe 18: Seien u, v klassische Lösungen von

$$\begin{aligned} \partial_t u + \partial_x f(u) &= \varepsilon \partial_{xx} u \\ u(x,0) &= u_0(x) \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} \partial_t v + \partial_x f(v) &= \varepsilon \partial_{xx} v \\ v(x,0) &= v_0(x). \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass

$$\|u(\cdot,t) - v(\cdot,t)\|_{L^1} \leq \|u_0 - v_0\|_{L^1}$$

gilt.

Aufgabe 19: Betrachten Sie die Buckley-Leverett Gleichung, d.h. die Erhaltungsgleichung

$$\partial_t q + \partial_x f(q) = 0$$

mit der Flussfunktion

$$\frac{q^2}{q^2 + a(1-q)^2}, \quad 0 < a < 1.$$

Bestimmen Sie die Lösungsstruktur des Riemann Problems

$$q(x,0) = \begin{cases} 1 & : \quad x < 0 \\ 0 & : \quad x > 0. \end{cases}$$

Lesen Sie Abschnitt 16.1 aus dem Buch von LeVeque zur Bedeutung der Buckley-Leverett Gleichung.

Abgabe am 30. November 2017 am Beginn der Vorlesung.
Abgabe der Programmieraufgaben bis zum 30. November 2017 um 14:00 an david.kerkmann@hhu.de.
Besprechung in der Übung am 8. Dezember 2017.