MATHEMATISCHES INSTITUT

PROF. DR. CHRISTIANE HELZEL
DAVID KERKMANN

16. NOVEMBER 2017

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

12	13	14	15	Σ

NAME: ________________
MAT-NR.: ________________
NAME: ________________
MAT-NR.: ________________

Numerische Verfahren für hyperbolische Erhaltungsgleichungen – 5. Übungsblatt

Aufgabe 12: Zeigen Sie, dass die Erhaltungsgleichung

$$\partial_t \left(q^2\right) + \partial_x \left(\frac{2}{3} q^3\right) = 0$$

die gleichen klassischen Lösungen wie die Burgersgleichung hat.

Zeigen Sie, dass die beiden Gleichungen unterschiedliche schwache Lösungen haben.

Aufgabe 13: Betrachten Sie auf $\Omega = \mathbb{R} \times [0, \infty)$ die Burgersgleichung

$$\partial_t q + \partial_x \left(\frac{q^2}{2}\right) = 0 \tag{1}$$

mit Anfangsdaten $q(x, 0) = q_0(x)$ und der Periodizitätsbedingung $q(x + 1, t) = q(x, t)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

1. Implementieren Sie das Finite Volumen Verfahren

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}(F_{i+1/2} - F_{i-1/2}) \tag{2}$$

   mit folgendem numerischen Fluss:

$$F_{i+1/2} = \begin{cases} 0.5(Q_{i+1}^n)^2 & : \quad 0.5(Q_i^n + Q_{i+1}^n) < 0 \\ 0.5(Q_i^n)^2 & : \quad \text{sonst} \end{cases} \tag{3}$$

2. Testen Sie Ihr Verfahren an den Anfangsdaten

$$q_0(x) = 1 + \sin(2\pi x) \tag{4}$$

   auf dem Gebiet $[0, 1]$ und stellen Sie die numerische Lösung zu den Zeitpunkten $T \in \{0.05, 0.1, 0.15\}$ dar.

3. Test Sie ihr Verfahren an den Anfangsdaten

$$q(x, 0) = \begin{cases} 1 & : \quad x \in [0, 1] \backslash [0.4, 0.6] \\ -0.5 & : \quad 0.4 \le x \le 0.6 \end{cases} \tag{5}$$

   auf dem Gebiet $[0, 1]$ und stellen Sie die numerische Lösung zu den Zeitpunkten $T \in \{0.05, 0.1, 0.15\}$ dar. Wie bewerten Sie die von Ihnen gefundene Lösung?

b.w.

Aufgabe 14: Zeigen Sie, dass die viskose Burgersgleichung

$$\partial_t q + q\partial_x q = \varepsilon \partial_{xx} q$$

'traveling wave' Lösungen der Form $q_\varepsilon(x,t) = w((x-st)/\varepsilon)$ hat.

Hinweis: Es sei $\xi = (x-st)/\varepsilon$. Leiten Sie eine gew. DGL für w her und verifizieren Sie, dass diese DGL Lösungen der Form

$$w(\xi) = q_r + \frac{1}{2}(q_l - q_r)\left(1 - \tanh\left(\frac{(q_l - q_r)\xi}{4}\right)\right),$$

mit $q_l > q_r$ und $s = (f(q_l) - f(q_r))/(q_l - q_r)$ hat.

Skizzieren Sie die Lösung. Wie verhält sich die Lösung $q_\varepsilon(x,t)$ in Abhängigkeit von ε?

Warum gibt es keine 'traveling wave' Lösungen für $q_l < q_r$?

Aufgabe 15: Betrachten Sie die Burgersgleichung mit Anfangsdaten

$$q_0(x) = \begin{cases} 2 & : \quad x < -1 \\ 1 & : \quad -1 < x < 1 \\ 0 & : \quad x > 1 \end{cases}$$

Bestimmen Sie eine schwache Lösung dieses Anfangswertproblems.

Hinweis: Betrachten Sie im Schnittpunkt der Unstetigkeitskurven erneut ein Anfangswertproblem mit stückweise konstanten Daten.

Abgabe am 23. November 2017 am Beginn der Vorlesung.
Abgabe der Programmieraufgaben bis zum 23. November 2017 um 14:00 an david.kerkmann@hhu.de.
Besprechung in der Übung am 1. Dezember 2017.