MATHEMATISCHES INSTITUT

PROF. DR. CHRISTIANE HELZEL
DAVID KERKMANN

9. NOVEMBER 2017

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

8	9	10	11	Σ

NAME: ________________
MAT-NR.: ________________
NAME: ________________
MAT-NR.: ________________

Numerische Verfahren für hyperbolische Erhaltungsgleichungen – 4. Übungsblatt

Aufgabe 8: Beweisen Sie Parseval's Beziehung

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/\Delta x}^{\pi/\Delta x} |\hat{Q}^n(\xi)|^2 d\xi = \Delta x \sum_j |Q_j^n|^2.$$

Aufgabe 9: Sie f konvex und q_0 monoton fallend. Zeigen Sie, dass für alle

$$0 < T < \frac{-1}{\sup_{\mathbb{R}} f'' \cdot \inf_{\mathbb{R}} q_0'}$$

eine klassische Lösung $q \in C^1(\mathbb{R} \times [0,T])$ von

$$\begin{aligned} \partial_t q + \partial_x f(q) &= 0 \quad \text{in } \mathbb{R} \times (0,T) \\ q(x,0) &= q_0(x) \quad \text{in } \mathbb{R} \end{aligned}$$

existiert.

Aufgabe 10: Berechnen Sie den lokalen Abbruchfehler des Lax-Wendroff Verfahrens und führen Sie eine Von-Neumann-Stabilitätsanalyse durch.

b.w.

Aufgabe 11: Betrachten Sie wie in Aufgabe 1 auf $\Omega = \mathbb{R} \times [0, \infty)$ die Advektionsgleichung

$$\partial_t q(x,t) + c\partial_x q(x,t) = 0, \qquad (c > 0) \tag{1}$$

mit Anfangsdaten $q(x,0) = q_0(x)$ und der Periodizitätsbedingung $q(x+1,t) = q(x,t)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Betrachten Sie für die numerischen Rechnungen wieder das Intervall $[0,1]$.

1. Implementieren Sie das Lax-Wendroff Verfahren.

2. Betrachten Sie das AWP (1) mit Advektionsgeschwindigkeit $c = 2$, Anfangsdaten

$$q(x,0) = \begin{cases} 0 & : \quad x \in [0,1] \backslash [0.4, 0.6] \\ 1 & : \quad 0.4 \leq x \leq 0.6 \end{cases}$$

   und der Periodizitätsbedingung $q(t, x+1) = q(t,x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}^+$.

   Stellen Sie die numerischen Ergebnisse des Verfahens zum Zeitpunkt $t = 1$ graphisch dar. Verwenden Sie für die Diskretisierung geeignete Werte für Δx und Δt.

3. Erweitern Sie ihre Darstellung aus 2., indem Sie die exakten Lösung zusammen mit der numerischen Lösung darstellen.

4. Betrachten Sie das AWP (1) mit Advektionsgeschwindigkeit $c = 1$, Anfangsdaten

$$q(x,0) = \sin(2\pi n x)$$

   und der Periodizitätsbedingung $q(t, x+1) = q(t,x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}^+$.

   Stellen Sie auch für diese Anfangsdaten die numerische Lösung des Verfahrens zum Zeitpunkt $t = 10$ zusammen mit der exakten Lösung graphisch dar, jeweils für $n = 1$ und $n = 5$. Verwenden Sie für die Diskretisierung $\Delta x = 1/100$ und verschiedenen CFL Zahlen. Welche Beobachtung machen Sie? Interpretieren Sie Ihre Resultate unter Verwendung der modifizierten Gleichungsanalyse.

Abgabe am 16. November 2017 am Beginn der Vorlesung.
Abgabe der Programmieraufgaben bis zum 16. November 2017 um 14:00 an david.kerkmann@hhu.de.
Besprechung in der Übung am 24. November 2017.