MATHEMATISCHES INSTITUT
PROF. DR. CHRISTIANE HELZEL
DAVID KERKMANN

2. NOVEMBER 2017

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

6	7	Σ

NAME: ____________

MAT-NR.: ____________

NAME: ____________

MAT-NR.: ____________

Numerische Verfahren für hyperbolische Erhaltungsgleichungen – 3. Übungsblatt

Aufgabe 6:

1. Benutzen Sie das Upwind Verfahren, um die Advektionsgleichung

$$\partial_t q(x,t) + c\partial_x q(x,t) = 0, \qquad x \in \mathbb{R}, c > 0 \tag{1}$$

mit Anfangsdaten

$$q(x,0) = 2H(-x). \tag{2}$$

zu approximieren. Dabei ist

$$H(x) = \begin{cases} 0 & : x < 0 \\ 1 & : x \geq 0 \end{cases} \tag{3}$$

die Heaviside-Funktion. Für numerische Simulationen betrachten wir (1) mit Anfangsdaten (2) auf dem Intervall $[-1,4]$ und Randbedingung $q(-1,t) = 2 \quad \forall t > 0$. Verwenden Sie $c = 1, T = 3$ und die CFL Zahl $\nu = 0.8$. Sie können dazu ihr Programm aus Aufgabe 1 nutzen. Verwenden Sie verschieden Gitterweiten h und bestimmen sie die experimentelle Konvergenzrate. Wieso erhalten sie nicht die erwartete Konvergenzordnung?

2. Um dieses Ergebnis besser zu verstehen, schauen wir uns die modifizierte Gleichungsanalyse an. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass mit dem Upwind Verfahren die Advektions-Diffusions-Gleichung

$$\partial_t q(x,t) + c\partial_x q(x,t) = \beta\partial_{xx} q(x,t), \qquad (c > 0) \tag{4}$$

mit $\beta = \frac{1}{2}ch(1-\nu)$ von höherer Ordnung approximiert wird. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$v(x,t) = \operatorname{erfc}\left(\frac{x-ct}{\sqrt{4\beta t}}\right) \tag{5}$$

mit

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-z^2} dz \tag{6}$$

das Anfangswertproblem (4) mit Anfangsdaten (2) exakt löst.

Hinweis: Es gilt

$$\operatorname{erfc}(-\infty) = 2,\ \operatorname{erfc}(0) = 1,\ \operatorname{erfc}(\infty) = 0. \tag{7}$$

3. Vergleichen Sie die beiden exakten Lösungen von (1) + (2) und (4) + (2), indem Sie zu einem beliebigen Zeitpunkt t

$$\|q - v\|_1 = \int_{-\infty}^\infty |q(x,t) - v(x,t)| dx \tag{8}$$

berechnen. Welche Konvergenzordnung erhalten Sie?

b.w.

Aufgabe 7: Wir möchten nun ein Upwind Verfahren auf einem ungleichmäßigen Gitter durchführen. Dazu seien die Gitterweiten h_i gegeben und wir nehmen an, dass es Koeffizieten $\underline{c}, \overline{c}$ gibt, sodass stets

$$\underline{c}h \leq h_i \leq \overline{c}h \quad \forall i \tag{9}$$

gilt, wobei $h := \max_i h_i$.

1. Bestimmen Sie den lokalen Abbruchfehler des Verfahrens

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{c\Delta t}{h_i}\left(Q_i^n - Q_{i-1}^n\right). \tag{10}$$

2. Zeigen Sie, dass das Verfahren

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{2c\Delta t}{h_i + h_{i-1}}\left(Q_i^n - Q_{i-1}^n\right) \tag{11}$$

die Konsistenzordnung 1 besitzt, aber nicht die Erhaltungseigenschaft erfüllt.

3. Wir definieren den numerischen Fluss an den Zellkanten als Newtoninterpolation der Flüsse in den Zellmitten:

$$f_{i+1/2}^n = f(Q_i^n) + \frac{f(Q_i^n) - f(Q_{i-1}^n)}{h_i + h_{i-1}} h_i \tag{12}$$

Zeigen Sie zunächst, dass

$$f_{i+1/2}^n \approx f_i^n + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{h_i}{2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{(h_i + h_{i-1})h_i}{8} \tag{13}$$

und

$$f_{i-1/2}^n \approx f_i^n - \frac{\partial f}{\partial x}\frac{h_i}{2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\alpha \tag{14}$$

wobei $\alpha = \mathcal{O}(h^2)$.

Berechnen Sie nun den lokalen Abbruchfehler des konservativen Verfahrens

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{\Delta t}{h_i}\left(f_{i+1/2}^n - f_{i-1/2}^n\right). \tag{15}$$

Welche Konsistenzordnung erhält man auf einem äquidistanten Gitter?

Abgabe am 9. November 2017 am Beginn der Vorlesung.
Abgabe der Programmieraufgaben bis zum 9. November 2017 um 14:00 an david.kerkmann@hhu.de.
Besprechung in der Übung am 17. November 2017.