MATHEMATISCHES INSTITUT

PROF. DR. CHRISTIANE HELZEL
DAVID KERKMANN

26. OKTOBER 2017

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

3	4	5	Σ

NAME: ____________________
MAT-NR.: ____________________
NAME: ____________________
MAT-NR.: ____________________

Numerische Verfahren für hyperbolische Erhaltungsgleichungen – 2. Übungsblatt

Aufgabe 3: Betrachten Sie die Erhaltungsgleichung

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial (cq)}{\partial x} = 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}, t > 0$$
$$q(x,0) = q_0(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R},$$

wobei $c = c(x)$ eine Funktion von x ist.

Sei $v(x,t) := q(x,t)c(x)$. Zeigen Sie, dass v die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial v}{\partial t} + c\frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

erfüllt.

Aufgabe 4: Wir betrachten wieder die Erhaltungsgleichung

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial (c(x)q)}{\partial x} = 0.$$

Charakteristische Kurven $X(t)$ dieser partiellen Differentialgleichung sind Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$X'(t) = c(X(t)).$$

- Zeigen Sie, dass Lösungen der partielle Differentialgleichung entlang der charakteristischen Kurven die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt}q(X(t),t) = -c'(X(t))q(X(t),t)$$

  erfüllen.

- Zeigen Sie, dass Lösungen der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial q}{\partial t} + c(x)\frac{\partial q}{\partial x} = 0$$

  entlang der charakteristischen Kurven konstant sind.

Aufgabe 5: Führen Sie eine modifizierte Gleichungsanalyse für das implizite Upwind-Verfahren durch.

Welche Unterschiede erwarten Sie von numerische Lösungen des expliziten bzw. impliziten Upwind-Verfahrens. Verifizieren Sie Ihre Aussagen anhand selbst gewählter Testrechnungen.

Abgabe am 2. November 2017 am Beginn der Vorlesung.
Abgabe der Programmieraufgaben bis zum 2. November 2017 um 14:00 an david.kerkmann@hhu.de.
Besprechung in der Übung am 10. November 2017.