MATHEMATISCHES INSTITUT

PROF. DR. CHRISTIANE HELZEL
DAVID KERKMANN

18. JANUAR 2018

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

36	37	38	Σ

NAME: ____________________
MAT-NR.: ____________________
NAME: ____________________
MAT-NR.: ____________________

Numerische Verfahren für hyperbolische Erhaltungsgleichungen – 12. Übungsblatt

Aufgabe 36: Benutzen Sie Ihr Programm aus Aufgabe 34, um die experimentelle Konvergenzrate von p und u zu bestimmen. Eine Musterlösung von Aufgabe 34 haben wir auf die Website hochgeladen. Verwenden Sie die Anfangsdaten

$$p(x,0) = \sin(2\pi x), \qquad u(x,0) = 0 \tag{1}$$

auf dem Gebiet $[0,1]$ mit periodischen Randbedingungen und Endzeit $T = 2$ sowie $u0 = 0$. Denken Sie daran, die exakte Lösung korrekt auszurechnen! Prüfen Sie die Konvergenzrate ohne und mit Limiter.

Aufgabe 37: Betrachten Sie nun die Akustikgleichungen mit variablen Koeffizienten, d.h.

$$\begin{pmatrix} p \\ u \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} 0 & K(x) \\ 1/\rho(x) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ u \end{pmatrix}_x = 0. \tag{2}$$

Verändern Sie Ihr Programm aus Aufgabe 34, um das hochauflösende Verfahren für diese Gleichungen zu implementieren.

Die Fluktuationen sind nun gegeben durch

$$\mathcal{A}^- \Delta Q_{i-1/2} = s^1_{i-1/2} \mathcal{W}^1_{i-1/2} \tag{3}$$

sowie

$$\mathcal{A}^+ \Delta Q_{i-1/2} = s^2_{i-1/2} \mathcal{W}^2_{i-1/2} \tag{4}$$

mit den Wellen

$$\mathcal{W}^p_{i-1/2} = \alpha^p_{i-1/2} r^p_{i-1/2} \qquad p = 1,2 \tag{5}$$

und den Eigenvektoren

$$\begin{aligned} r^1_{i-1/2} &= \begin{bmatrix} -Z_{i-1} \\ 1 \end{bmatrix}, \\ r^2_{i-1/2} &= \begin{bmatrix} Z_i \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{6}$$

Außerdem sind

$$s^1_{i-1/2} = -c_{i-1} = -c(x_{i-1}), \quad s^2_{i-1/2} = c_i = c(x_i) \tag{7}$$

die zellzentrierten Geschwindigkeiten. Der Vektor α ist durch

$$\alpha = R^{-1}_{i-1/2}(q_r - q_l) \tag{8}$$

gegeben, wobei $R_{i-1/2}$ sich aus den beiden Eigenvektoren zusammensetzt.

b.w.

Ebenso ist Z_i durch

$$Z_i = Z(x_i)\ \forall i \tag{9}$$

gegeben.

Im Korrekturterm müssen Sie ebenso die Geschwindigkeiten $s^p_{i-1/2}$ einsetzen, sowie den Glattheitsfaktor $\theta^p_{i-1/2}$ durch die Projektion

$$\theta^p_{i-1/2} = \frac{\mathcal{W}^p_{I-1/2} \cdot \mathcal{W}^p_{i-1/2}}{\mathcal{W}^p_{i-1/2} \cdot \mathcal{W}^p_{i-1/2}} \tag{10}$$

ersetzen. I wird wie gewohnt durch das Vorzeichen der Geschwindigkeit $s^p_{i-1/2}$ bestimmt.

Auch hier können Sie die Musterlösung zu Aufgabe 34 als Startpunkt für Ihr Programm benutzen.

Testen Sie ihr Programm auf dem Gebiet $[-5, 5]$, den Anfangsdaten

$$\begin{aligned} p(x,0) &= 2\exp(-5(x+2)^2)\cos(-x) \\ u(x,0) &= p(x,0) \end{aligned} \tag{11}$$

und den Koeffizienten

$$\begin{aligned} K(x) &= \begin{cases} 16 : x < 0 \\ 0 : x > 0 \end{cases} \\ \rho(x) & \begin{cases} 1 : x < 0 \\ 0,5 : x > 0 \end{cases} \end{aligned} \tag{12}$$

Führen Sie auch hier eine Konvergenzstudie mit und ohne Limiter zum Zeitpunkt $T = 6$ durch. Die ghost cells können Sie für dieses Beispiel mit konstant fortgesetzten Daten aus den Randzellen füllen. Die, hier unbekannte, exakte Lösung können Sie durch eine sehr fein berechnete numerische Lösung ersetzen. Was stellen Sie fest?

Aufgabe 38: Betrachten Sie das unlimitierte hochauflösende Verfahren zur Approximation der Transportgleichung mit variabler Geschwindigkeit

$$q_t + (u(x)q)_x = 0 \quad (u(x) > 0\ \forall x) \tag{13}$$

mit

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{i-\frac{1}{2}} &= Q_i - Q_{i-1}, \\ s_{i-\frac{1}{2}} &= u_{i-\frac{1}{2}}, \\ \mathcal{A}^+\Delta Q_{i-\frac{1}{2}} &= u_{i-\frac{1}{2}}(Q_i - Q_{i-1}), \\ \mathcal{A}^-\Delta Q_{i-\frac{1}{2}} &= (u_{i-\frac{1}{2}} - u_{i-\frac{3}{2}})Q_{i-1} \end{aligned} \tag{14}$$

und dem Korrekturterm

$$F_{i-1/2} = \frac{1}{2}|s_{i-1/2}|\left(1 - \frac{\Delta t}{\Delta x}|s_{i-1/2}|\right)\mathcal{W}_{i-1/2}. \tag{15}$$

Bestimmen Sie die Konsistenzordnung dieses Verfahrens.

Abgabe am 25. Januar 2018 am Beginn der Vorlesung.
Abgabe der Programmieraufgaben bis zum 25. Januar 2018 um 14:00 an david.kerkmann@hhu.de.
Besprechung in der Übung am 2. Februar 2018.