MATHEMATISCHES INSTITUT

PROF. DR. CHRISTIANE HELZEL
DAVID KERKMANN

19. OKTOBER 2017

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

1	2	Σ

NAME: ____________

MAT-NR.: ____________

NAME: ____________

MAT-NR.: ____________

Numerische Verfahren für hyperbolische Erhaltungsgleichungen – 1. Übungsblatt

Aufgabe 1: Betrachten Sie auf $\Omega = \mathbb{R} \times [0, \infty)$ die Advektionsgleichung

$$\partial_t q(x,t) + c\partial_x q(x,t) = 0, \qquad (c > 0) \tag{1}$$

mit Anfangsdaten $q(x, 0) = q_0(x)$ und der Periodizitätsbedingung $q(x + 1, t) = q(x, t)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Wir wollen verschiedene Diskretisierungen der Advektionsgleichung auf dem Intervall $[0, 1]$ betrachten. Dazu wählen wir äquidistante Stützstellen $0 = x_{-1/2}, \ldots, x_{I-1/2} = 1$ mit $x_{i-1/2} = ih$, $h = 1/I$, $I \in \mathbb{N}$. k sei eine konstante Zeitschrittweite. Dann approximieren wir den Zellmittelwert

$$Q_i^n := \frac{1}{h} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q(x, nk)dx.$$

Die diskrete Periodizitätsbedingung hat die Form $Q_{i+I}^n = Q_i^n$ für alle i, n.

1. Implementieren Sie die folgenden numerischen Verfahren für die Advektionsgleichung:

   Das Upwind-Verfahren:
   $$Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{k}{h}c(Q_i^n - Q_{i-1}^n)$$
   Das implizite Upwind-Verfahren:
   $$Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{k}{h}c(Q_i^{n+1} - Q_{i-1}^{n+1})$$
   Zur Bestimmung der Startwerte Q_i^0 können Sie die Mittelpunktsregel verwenden.

2. Betrachten Sie das AWP (1) mit Advektionsgeschwindigkeit $c = 2$, Anfangsdaten
   $$q(x, 0) = \begin{cases} 0 & : \quad x \in [0, 1] \backslash [0.4, 0.6] \\ 1 & : \quad 0.4 \leq x \leq 0.6 \end{cases}$$
   und der Periodizitätsbedingung $q(t, x + 1) = q(t, x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}^+$.

   Stellen Sie die numerischen Ergebnisse der beiden Verfahen zum Zeitpunkt $t = 1$ und $t = 2$ graphisch dar. Verwenden Sie für die Diskretisierung verschiedene Gitterweiten, z.B. $I = 50$, $I = 100$ und $I = 200$.

   Wählen Sie die Zeitschritte so, dass $k = 0.1h/c$, $k = 0.5h/c$, $k = 0.9h/c$ und $k = h/c$ gilt.

3. Erweitern Sie ihre Darstellung aus 2., indem Sie die exakten Lösung zusammen mit der numerischen Lösung darstellen.

4. Betrachten Sie das AWP (1) mit Advektionsgeschwindigkeit $c = 1$, Anfangsdaten
   $$q(x, 0) = e^{-\beta(x-0.5)^2} \cdot \sin(fx), \quad \beta = 100, f = 80, \text{ für } x \in [0, 1],$$
   und der Periodizitätsbedingung $q(t, x + 1) = q(t, x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}^+$.

   Stellen Sie auch für diese Anfangsdaten die numerische Lösung zum Zeitpunkt $t = 1$ der beiden Verfahren zusammen mit der exakten Lösung graphisch dar.

b.w.

Aufgabe 2: In der Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen haben einige von Ihnen die Wärmeleitungsgleichung (Diffusionsgleichung)

$$\partial_t q(x,t) = \kappa \partial_{xx} q(x,t), \qquad (\kappa > 0) \tag{2}$$

kennengelernt. Betrachten Sie dazu wie in Aufgabe 1 Anfangsdaten $q(x,0) = q_0(x)$ und die Periodizitätsbedingung $q(x+1,t) = q(x,t)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Wir wollen verschiedene Diskretisierungen der Diffusionsgleichung auf dem Intervall $[0,1]$ betrachten. Dazu wählen wir äquidistante Stützstellen $0 = x_{-1/2}, \ldots, x_{I-1/2} = 1$ mit $x_{i-1/2} = ih$, $h = 1/I$, $I \in \mathbb{N}$. k sei eine konstante Zeitschrittweite. Dann approximieren wir den Zellmittelwert

$$Q_i^n := \frac{1}{h} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q(x, nk) dx.$$

Die diskrete Periodizitätsbedingung hat die Form $Q_{i+I}^n = Q_i^n$ für alle i, n.

1. Implementieren Sie die folgenden numerischen Verfahren für die Diffusionsgleichung:

   Zentrierte Differenzen + expliziter Euler:

   $$Q_i^{n+1} = Q_i^n + \frac{k}{h^2} \kappa (Q_{i-1}^n - 2Q_i^n + Q_{i+1}^n)$$

   Zentrierte Differenzen + Trapezregel *(Crank-Nicolson)*:

   $$Q_i^{n+1} = Q_i^n + \frac{k}{2h^2} \kappa (Q_{i-1}^n - 2Q_i^n + Q_{i+1}^n + Q_{i-1}^{n+1} - 2Q_i^{n+1} + Q_{i+1}^{n+1})$$

   Zur Bestimmung der Startwerte Q_i^0 können Sie die Mittelpunktsregel verwenden.

2. Betrachten Sie das AWP (2) mit Koeffizient $\kappa = 0.02$, Anfangsdaten

   $$q(x,0) = \begin{cases} 0 & : \quad x \in [0,1] \backslash [0.4, 0.6] \\ 1 & : \quad 0.4 \le x \le 0.6 \end{cases}$$

   und der Periodizitätsbedingung $q(t, x+1) = q(t, x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}^+$.

   Stellen Sie die numerischen Ergebnisse der beiden Verfahen zum Zeitpunkt $t = 1$ und $t = 2$ graphisch dar. Verwenden Sie für die Diskretisierung verschiedene Gitterweiten, z.B. $I = 50$, $I = 100$ und $I = 200$.

   Wie müssen Sie die Zeitschritte wählen, damit die Verfahren stabil bleiben?

Hinweis: Die Homepage von LeVeque unter http://faculty.washington.edu/rjl/booksnotes.html könnte sich als nützlich erweisen.

Abgabe am 26. Oktober 2017 am Beginn der Vorlesung.
Abgabe der Programmieraufgaben bis zum 26. Oktober 2017 um 14:00 an david.kerkmann@hhu.de.
Besprechung in der Übung am 3. November 2017.