Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christiane Helzel
Andreas Troll

Heinrich Heine Universität Düsseldorf

30.11.2017

Computergestützte Mathematik zur linearen Algebra – 8. Übungsblatt

WICHTIG: Kommentieren Sie Ihren Quelltext. Ihre Skripte müssen durch ausführen des „run“-Befehls (grünes Dreieck bzw. F5) lauffähig sein.

Aufgabe 26: (*Grenzen des Computers*)

Skriptname: *gleitkommazahlen.py*

(a) Definieren Sie die Variable `a`$=1,2\cdot 10^{34}$. Was erwarten Sie bei folgender Rechnung: `10*a-9*a-a`? Überprüfen Sie Ihre Vermutung mit dem PC. Wieso kommt dieses Ergebnis zustande?

(b) Definieren Sie die Variable `b`$=12\cdot 10^{34}$. Was erwarten Sie bei folgender Rechnung: `10*b-9*b-b`? Überprüfen Sie Ihre Vermutung mit dem PC. Wieso kommt dieses Ergebnis zustande? Steht es im Widerspruch zu a)?

(c) Seien $p(x)=\frac{1}{2}(x-1)^7$ und $q(x)=\frac{1}{2}x^7-\frac{7}{2}x^6+\frac{21}{2}x^5-\frac{35}{2}x^4+\frac{35}{2}x^3-\frac{21}{2}x^2+\frac{7}{2}x-\frac{1}{2}$. Man kann leicht überprüfen, dass $p(x)=q(x)$ gilt.
Plotten Sie p und q einmal in einen gemeinsamen Plot über dem Intervall $[0{,}9,\ 1{,}1]$ und einmal in einen gemeinsamen Plot über dem Intervall $[0{,}99,\ 1{,}01]$. Sind die Ergebnisse wie erwartet? Was ist der Grund dafür?

Aufgabe 27: (*Gleichungssysteme lösen*)

Skriptname: *LGS_mit_Gauss.py*
Hinweis: Sollte Sie Aufgabe 23 nicht bearbeitet haben, finden Sie ab Freitagnachmittag eine Version auf der Vorlesungsseite.

(a) `Gaussian_elimination4(A)` (Vorlesung 7) verändert beim Aufruf die Eingabematrix `A`. Schreiben Sie eine modifizierte Funktion `Gaussian_elimination4_mod(A)`, welche dies nicht tut.

(b) Schreiben Sie eine Funktion `x=loeseLGSGauss(A,b)`, die mit `Gaussian_elimination4_mod(A)` und `rueckwaertseinsetzen(R, b)` (siehe Aufgabe 23 von Blatt 7.) das lineare Gleichungssystem $Ax=b$ (mit A invertierbar) löst und x zurückgibt. Achten Sie darauf, dass Ihre Funktion auch mit Eingabedaten, welche nur Integerelemente haben, funktioniert.

(c) Testen Sie `loeseLGSGauss` mit passenden Matrizen und Vektoren, indem Sie die Lösungsvektoren und die Residuen mit den echten Lösungen vergleichen.

Aufgabe 28: (*Matrix erstellen*)

Skriptname: *stern.py*
Schreiben Sie ein Funktion `M=diskreter_Laplace(N)`, welche eine natürliche Zahl N übergeben bekommt und folgende Matrix M erstellt und zurückgibt:

$$M=\begin{pmatrix} S & I & & \\ I & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & I \\ & & I & S \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{N^2\times N^2} \text{ mit } S=\begin{pmatrix} -4 & 1 & & \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & 1 & -4 \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{N\times N}$$

und $I\in\mathbb{R}^{N\times N}$ Einheitsmatrix.
Hinweis: NumPy hat einige Funktionen, die Ihnen das erstellen bestimmter Matrizen sehr erleichtern.

Aufgabe 29: (*Eigenvektoren*)

Befehle: `np.linalg.eig`
Skriptname: *ellipsen2.py*
Hinweis: Gucken Sie sich Aufgabe 24 von Blatt 7 an. Diese Aufgabe baut darauf auf. Sollten Sie Aufgabe 24 nicht bearbeitet haben, finden Sie ab Freitagnachmittag eine Version auf der Vorlesungsseite.

(a) Schreiben Sie eine Funktion `male_ellipse(A)`, die eine 2×2 Matrix A übergeben bekommt und folgendes tut:

- Ein Einheitskreis und die Ellipse, die durch Anwendung von A auf den Kreis entsteht (siehe Aufgabe 24) sollen mit `subplot` nebeneinander geplottet werden. Ändern Sie die Achsen so, dass man beide Plots gut vergleichen kann.
- Zeichnen Sie zusätzlich die beiden (normierten) Eigenvektoren v_1 und v_2 von A in den Einheitskreis und Av_1 und Av_2 in die Ellipse. Hierbei sind die Einträge der Vektoren die x- bzw. y-Koordinate.
- Im Titel des Plots sollen die Eigenwerte der Matrix A (auf zwei Nachkommastellen gerundet) erkennbar sein.

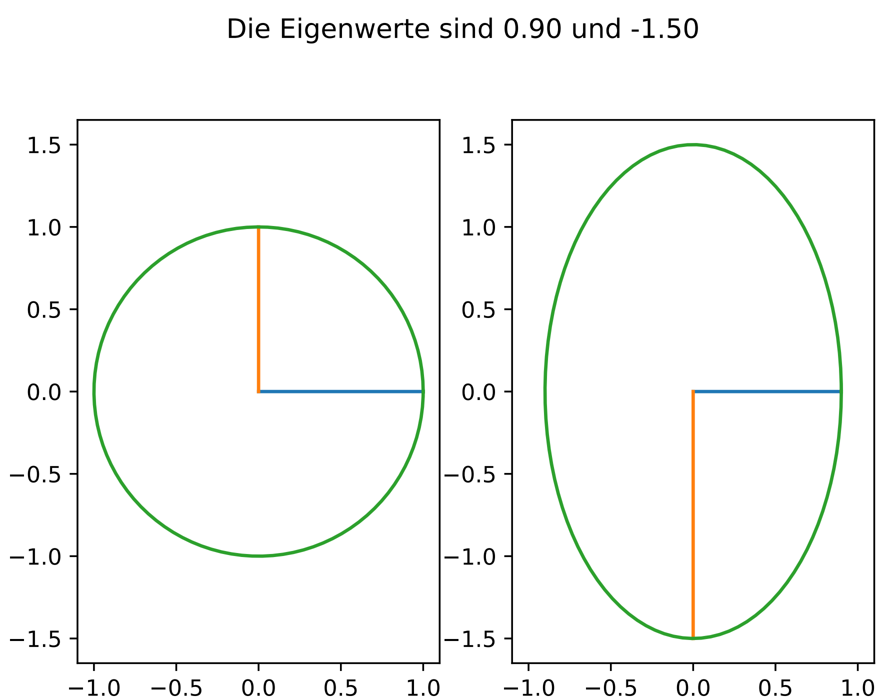
(b) Schreiben Sie eine Funktion `viele_ellipsen(tupel)`. Sie bekommt ein *tuple* `tupel` mit Matrizen übergeben und verwendet `male_ellipse` um für jede Matrix aus `tupel` einen eigenen Plot zu erstellen.

(c) Testen Sie Ihre Funktionen an folgenden Matrizen:

$$\begin{pmatrix} 0{,}9 & 0 \\ 0 & -1{,}5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} -0{,}4 & 0 \\ 1 & 0{,}5 \end{pmatrix}$$

(d) Erklären Sie Ihre Plots.

Abbildung 1: Ein Beispielplot für Aufgabe 29



Besprechung in den Übungen vom 4.-8.12. 2017.