MATHEMATISCHES INSTITUT
PROF. DR. CHRISTIANE HELZEL
ANDREAS TROLL

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

23.11.2017

Computergestützte Mathematik zur linearen Algebra – 7. Übungsblatt

WICHTIG: Kommentieren Sie Ihren Quelltext. Ihre Skripte müssen durch ausführen des „run"-Befehls (grünes Dreieck bzw. F5) lauffähig sein.

Aufgabe 22: (*Ausgleichrechnung und Dateieinlesen*)

Skriptname: *ausgleichsrechnung.py*
Forscher vermuten einen linearen Zusammenhang zwischen Schokoladenkonsum (in $^{kg}/_{Monat}$) und Glücklichsein (auf einer Skala von 0 bis 100). Dazu haben Sie 99 Leute befragt.

(a) Importieren Sie die Daten aus der Datei *Schokolade.txt* (siehe Vorlesungsseite). Die erste Zahl jeder Dateizeile ist der Schokoladenkonsum, die zweite Zahl gibt an, wie glücklich die Person ist.

(b) Berechnen Sie die Koeffizienten für eine Ausgleichsgerade und geben Sie diese mit `print` aus.

(c) Zeichnen Sie die Datenpunkte und die Ausgleichsgerade in einen gemeinsamen Plot.

(d) Neuere Untersuchungen legen nahe, dass sich die Daten eher nach der Formel

$$f(x) = ax^2 + bx + c \text{ (mit } a, b, c \text{ unbekannt)}$$

verhalten. Lösen Sie das Ausgleichsproblem für diesen Ansatz, geben Sie die Koeffizienten wieder aus und zeichnen Sie $f(x)$ mit den berechneten Koeffizienten zusätzlich in Ihren Plot.

(e) Fügen Sie Achsenbeschriftung, Legende und Titel hinzu.

Aufgabe 23: (*Gleichungssystem lösen*)

Skriptname: *obere_dreiecksmatrix.py*
Gegeben Sei eine obere Dreiecksmatrix $(r_{ij})_{i,j=1}^{N} = R \in \mathbb{R}^{N\times N}$ und ein Vektor $(b_i)_{i=1}^{N} = b \in \mathbb{R}^N$.

(a) Schreiben Sie eine Funktion `x=rueckwaertseinsetzen(R,b)`, welche das lineare Gleichungssystem $Rx = b$ durch Rückwärtseinsetzen löst (benutzen Sie NICHT den `solve`-Befehl).
x lässt sich wie folgt berechnen:

$$x_N = \frac{b_N}{r_{NN}} \text{ und } x_n = \frac{1}{r_{nn}}\left(b_n - \sum_{k=n+1}^{N} x_k r_{nk}\right) \text{ für } n = N-1, \ldots, 1$$

(b) Woran kann man sehen, dass R nicht regulär ist? Erweitern Sie Ihr Programm so, dass eine aussagekräftige Warnung angezeigt wird, falls R singulär ist. Geben Sie in diesem Fall ein 0-array zurück. Benutzen Sie NICHT `det()` oder ähnliche Funktionen.

(c) Testen Sie Ihr Programm an geeigneten Gleichungssystemen (reguläre und singuläre Matrizen), indem Sie $\|Rx - b\|$ berechnen und mit der Lösung von `solve` vergleichen (siehe Blatt 6).

Aufgabe 24: (*Zeichnen*)

Skriptname: *ellipsen.py*
Die Funktion $g(\theta)$

$$g : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2,\ \theta \mapsto (\cos(\theta), \sin(\theta))$$

bildet θ auf einen Punkt des Einheitskreises ab.

(a) Zeichnen Sie einen (geschlossenen) Einheitskreis. Verwenden Sie den Befehl `plt.axis`, um den Plot so zu zeichnen, dass der Kreis wirklich kreisförmig ist.

(b) Wenden Sie die folgenden Matrizen auf die Punkte Ihres Kreises an und zeichnen Sie die drei Ellipsen und den Einheitskreis in Subplots nebeneinander:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,7 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1,3 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 1,4 & -0,7 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

(c) Verwenden Sie die Befehle `plt.axis`, `plt.xlim` und `plt.ylim` um die Größen der Ellipsen besser vergleichen zu können. Erklären Sie die Plots.

Aufgabe 25: (*Gleichungssysteme stören*)

Skriptname: *LGSstoeren.py*
Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 10^{-11} \\ 0 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 10^{-11} & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ und der Vektor } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(a) Lösen Sie die Gleichungssysteme $Ax_A = b$ und $Bx_B = b$.

(b) Erstellen Sie nun die gestörten Matrizen $\hat{A}$ und $\hat{B}$, indem Sie bei A und B jeweils zum Eintrag unten rechts 10^{-7} hinzuaddieren.

(c) Lösen Sie die Gleichungssysteme $\hat{A}\hat{x}_A = b$ und $\hat{B}\hat{x}_B = b$.

(d) Vergleichen Sie x_A und x_B mit $\hat{x}_A$ und $\hat{x}_B$. Was fällt Ihnen auf? Verwenden Sie den `cond`-Befehl aus dem `np.linalg`-Modul (was tut der Befehl überhaupt?) und andere Matrizen um ein Muster zu erkennen. Wieso ist das für die numerische Mathematik wichtig?

Besprechung in den Übungen vom 27.11.-1.12. 2017.