MATHEMATISCHES INSTITUT
PROF. DR. CHRISTIANE HELZEL
ANDREAS TROLL

HEINRICH HEINE UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

21.12.2017

Computergestützte Mathematik zur linearen Algebra – 11. Übungsblatt

WICHTIG: Kommentieren Sie Ihren Quelltext. Ihre Skripte müssen durch ausführen des „run"-Befehls (grünes Dreieck bzw. F5) lauffähig sein.

Aufgabe 38: (*Pseudocode*)

Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, mit $m \geq n$. Aus Vorlesung 10 kennen Sie ja schon eine stabilere modifizierte Variante des Gram-Schmidt-Verfahrens. Hier sehen Sie nun eine andere Variante für eine reduzierte QR-Zerlegung $QR = A$ als Pseudocode:

```
Input: Matrix 'A'
for i = 1 to n
    v_i = A_i
for i = 1 to n
    R_ii = ||v_i||_2
    Q_i = v_i / R_ii
    for j = i+1 to n
        R_ij = Q_i^T v_j
        v_j = v_j - R_ij · Q_i
Output: 'Q' und 'R'
```

Hierbei ist A_i die i-te Spalte von A und A_{ij} der Eintrag von A der i-ten Zeile und j-ten Spalte.

(a) Implementieren Sie diese Variante in PYTHON unter dem Funktionsnamen `ModGramSchmidt2`.

(b) Vergleichen Sie Ihre Version mit der Variante aus der Vorlesung und mit der QR-Implementierung des NumPy.linalg-Pakets.

Aufgabe 39: (*Reduzierte Singulärwertzerlegung*) AKTUALISIERT

Befehle: `np.linalg.eigh`, `np.linalg.svd`

Sei $U\Sigma V^H$ eine Singulärwertzerlegung von $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Den Zusammenhang (siehe Vorlesung)

$$A^H A = V\Sigma U^H U\Sigma V^H = V\Sigma^2 V^H$$

zwischen den Eigenwerten von $A^H A$ und den Singulärwerten von A kann man nutzen um eine Singulärwertzerlegung von A zu berechnen.

Hinweis: Es gilt: $Av_i = \sigma_i u_i$ und (wegen $\|u_i\| = 1$) $u_i = \frac{Av_i}{\sigma_i}$, mit $\sigma_i = \|Av_i\|$.

(a) Schreiben Sie eine Funktion `U,S,V=SVD(A)`, welche mit Hilfe von Eigenwertzerlegungen eine reduzierte Singulärwertzerlegung der Eingabematrix A berechnet und zurückgibt. Hierbei ist `S` ein Vektor mit den p Singulärwerten (Sie können von $p > 0$ ausgehen) und `U` und `V` sind $m \times p$ bzw. $n \times p$ Matrizen. Beachten Sie, dass die Singulärwerte der Größe nach sortiert sind. Wieso sollten Sie den Befehl `np.linalg.eigh` statt `np.linalg.eig` verwenden?

(b) Testen Sie Ihr Programm an folgender Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 5 & 6 \\ -7 & 8 & -9 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 40: (*Approximationseigenschaft*)

Befehle: `np.linalg.svd`
Schreiben Sie eine Funktion `zeichne_SVD_approx(A)`, die eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ übergeben bekommt.

(a) Ihre Funktion soll zuerst die Singulärwertzerlegung $A = U\Sigma V^H$ der Matrix berechnen.

(b) Danach soll Sie die Fehler $\|A - A_k\|_2$ für $k = 1, 2, \ldots, \min(m, n) - 1$ mit $A_k = U\Sigma_k V^H$ berechnen. Hierbei ist Σ_k die Matrix die entsteht, wenn man alle Singulärwerte aus Σ nach dem k-ten auf Null setzt.

(c) Zuletzt soll `zeichne_SVD_approx(A)` den k-ten Fehler und den Singulärwert σ_{k+1} gegen k sinnvoll (`semilogy`) in einen gemeinsamen Plot plotten.

Hinweis: Achten Sie darauf, dass die Singulärwertzerlegung in Ihrer Funktion nur einmal berechnet wird.

Aufgabe 41: (*Pfeile zeichnen*)

Sei $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Mit dem Befehl `plt.quiver` kann man das Vektorfeld von v zeichnen. Anschaulich wird dabei an jeden ausgewerteten Punkt (x, y) ein Pfeil/Vektor $v(x, y)$ angebracht.

(a) Sei $f(x, y) = 0{,}1 \cdot \sin(x)\cos(2y)$. Plotten Sie mit Hilfe von `plt.quiver` das Vektorfeld des Gradienten von f (mit 50 Punkten jeweils in x- und y-Richtung).

(b) Mit dem Befehl `plt.arrow()` kann man Pfeile zeichnen (siehe Vorlesung 11). Schreiben Sie eine Funktion `plotte_vf(x,y,u,v)`, welche ungefähr das gleiche tut wie `plt.quiver`. x und y sind die Koordinaten, u und v sind Matrizen mit den x- bzw. y-Komponenten des Vektorfeldes (also analog zu `plt.quiver`). Sie dürfen die erzeugten Plots gerne „schön“ machen, indem Sie die Pfeillänge skalieren oder ähnliches.

(c) Vergleichen Sie Ihre Funktion mit `plt.quiver` anhand der Funktion aus a).

Schöne Feiertage und einen guten Rutsch!

Besprechung in den Übungen vom 8.1.-12.1.2018.