Computergestützte Mathematik zur Linearen Algebra

Singulärwertzerlegung

Christiane Helzel

21. Dezember 2017

Singulärwertzerlegung

Definition und Satz. Jede Matrix $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ mit $\mathrm{rang}(A) = p$ besitzt eine Singulärwertzerlegung, d.h. ein System

$$\{\sigma_i, u_j, v_k \mid i = 1, \dots, p,\ j = 1, \dots, m,\ k = 1, \dots, n\}$$

mit $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots, \geq \sigma_p > 0$ und Orthonormalbasen $\{u_j\}_{j=1}^m$ und $\{v_k\}_{k=1}^n$ des $\mathbb{K}^m$ bzw. $\mathbb{K}^n$, wobei

$$\begin{array}{lll} Av_i = \sigma_i u_i, & A^T u_i = \sigma_i v_i, & i = 1, \dots, p, \\ Av_k = 0, & A^T u_j = 0, & j, k > p \end{array}$$

σ_i heißen Singulärwerte von A, v_i rechte und u_i linke Singulärvektoren.

$$A = U \Sigma V^H \ \text{ mit } u_i = U(:, i) \ \text{ und } v_i = V(:, i)$$

Singulärwertzerlegung

In Matrizenschreibweise:

$$U = [u_1, \dots, u_m] \in \mathbb{K}^{m,m}, \qquad V = [v_1, \dots, v_n] \in \mathbb{K}^{n,n}$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & 0 & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \sigma_p & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dann gilt $U^H U = I$, $V^H V = I$ und

$$A = U \Sigma V^H, \qquad A^H = V \Sigma U^H, \qquad \Sigma = U^H A V,$$

$$A = \sum_{i=1}^{p} \sigma_i u_i v_i^H, \qquad A^H = \sum_{i=1}^{p} \sigma_i v_i u_i^H$$

Geometrische Interpretation

Durchlaufen die Vektoren

$$x = \alpha_i v_i + \alpha_j v_j + \alpha_k v_k, \qquad ||x||^2 = \alpha_i^2 + \alpha_j^2 + \alpha_k^2 = 1$$

die Einheitskugel des Unterraums $\text{span}\{v_i, v_j, v_k\}$, dann durchlaufen ihre Bilder

$$Ax = \sigma_i \alpha_i u_i + \sigma_j \alpha_j u_j + \sigma_k \alpha_k u_k, = \beta_i u_i + \beta_j u_j + \beta_k u_k,$$

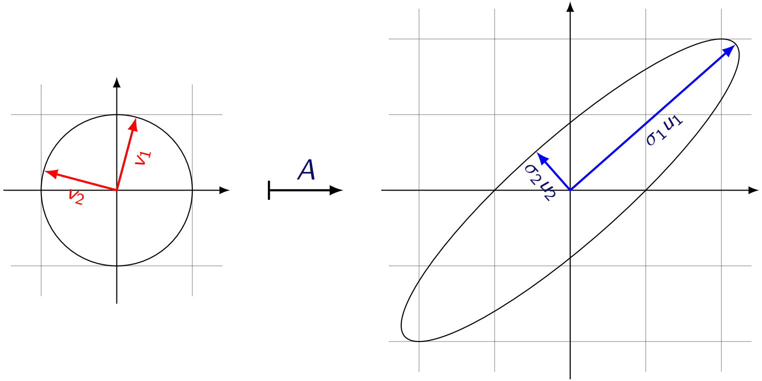
ein Ellipsoid in dem durch u_i, u_j und u_k aufgespannten Teilraum des $\mathbb{R}^m$, denn

$$\frac{1}{\sigma_i^2}\beta_i^2 + \frac{1}{\sigma_j^2}\beta_j^2 + \frac{1}{\sigma_k^2}\beta_k^2 = \alpha_i^2 + \alpha_j^2 + \alpha_k^2 = 1$$

(Ellipsoid mit Scheitelpunkten $(\pm\sigma_i, 0, 0)$, $(0, \pm\sigma_j, 0)$, $(0, 0, \pm\sigma_k)$ in den zu (u_i, u_j, u_k) gehörenden Koordinaten.)

Beispiel

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, Python: `U,S,V = npl.svd(A)`



Anwendung

Satz. Sei $A = U\Sigma V^H = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i u_i v_i^H$ und $A_k = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i u_i v_i^H$. Dann gilt

$$||A - A_k||_2 \leq ||A - B||_2$$

für alle Matrizen B mit $\operatorname{rang} B = k$ und $||A - A_k|| = \sigma_{k+1}$.
Es gilt auch $A_k = U\Sigma_k V^H$ mit $\Sigma_k = \operatorname{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_k, 0, \ldots, 0)$

Anwendung: Datenkompression