MATHEMATISCHES INSTITUT
PROF. DR. CHRISTIANE HELZEL
PAWEL BUCHMÜLLER

HEINRICH HEINE UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

04. FEBRUAR 2016

Computergestützte Mathematik zur Linearen Algebra – Probeklausur / Blatt 13

Die folgenden Hinweise beziehen sich im wesentlichen auf die tatsächliche Klausur. Laden Sie zunächst das Archiv `http://www.am.uni-duesseldorf.de/~helzel/Lehre/WiSe1516/CompLinA/home.zip` von der Webseite und enpacken Sie es. In etwa so wird Ihr Home-Verzeichnis bei der Klausur eingerichtet seien.

Wichtige Hinweise zur Klausur

- In Ihrem Home-Verzeichnis finden Sie die Datei `WerBinIch.m` sowie die Dateien `Aufgabe1.m`, `aufgabe2a.m`, `aufgabe2b.m`, `aufgabe3a.m`, `aufgabe3b.m`, `aufgabe4.m`, `aufgabe4daten.mat`, `Kunst.jpg`.
- **Ergänzen Sie zuerst die Datei `WerBinIch.m` mit Ihrem Namen, Vornamen, usw.**
- Als Hilfsmittel dürfen Sie ein von Ihnen selbst handbeschriebenes DIN-A4-Blatt verwenden. Im Order `VL/` in Ihrem Home-Verzeichnis finden Sie darüber hinaus die Dateien der Vorlesungen von der Website (Matlabdateien und Vorlesungsunterlagen).
- Es werden nur Lösungsvorschläge gewertet, die in Dateien mit dem jeweils in der Aufgabe angegebenen Namen in Ihrem Home-Verzeichnis gespeichert sind. Speichern Sie daher in kurzen Abständen Ihre Lösungen, um ggf. den Verlust von Daten zu vermeiden, falls MATLAB einmal abstürzt.
- Anders als bei den Übungsaufgaben werden bei den Klausuren in der Regel keine Testfälle vorgegeben. Diese müssen Sie sich ggf. selbst konstruieren, um Ihre Implementierungen zu überprüfen.
- Nicht lauffähiger Code kann in der Regel höchstens die Hälfte der Punkte erzielen. Kommentieren Sie ihren Code sinnvoll, so dass nachvollzogen werden kann, was Sie tun wollten.
- Es werden nur Lösungsvorschläge gewertet, bei denen der Lösungsweg (mit MATLAB) klar zu erkennen ist.
- Die vorgegebene Form einer zu implementierenden Funktion muss ggf. eingehalten werden (das heißt keine zusätzlichen Eingaben oder Rückgaben).
- Fehlerabfragen vom Typ "überprüfen Sie, ob die Eingabematrix symmetrisch ist" oder "geben Sie einen Fehler aus, falls…" werden in der Aufgabenstellung explizit gefordert. Fehlermeldungen sollen das aufgetretene Ereignis sinnvoll charakterisieren.
- Die abgebildeten Graphiken sind als Anhaltspunkt gedacht, wie Ihre Ausgabe aussehen könnte.
- Schreiben Sie ihre MATLAB-Skripte so, dass sie auch nach einem `clear all` noch lauffähig sind.
- Die Verteilung der Punkte auf die einzelnen Aufgaben ist angegeben. Zum Bestehen der Klausur sind XX Punkte hinreichend.
- Sie haben 90 Minuten Zeit für die Bearbeitung der Klausur.

Aufgabe 1: (5 Punkte)

Vervollständigen Sie die Funktion `Aufgabe1`. Diese Funktion soll als Parameter den Dateinamen eines Bildes und eine natürliche Zahl k erhalten. Nun soll das Bild eingelesen und unter Verwendung der ersten k Singulärwerte komprimiert werden.

- Stellen Sie das Originalbild zusammen mit dem komprimierten Bild in einem Fenster dar.
- Bestimmen Sie die Kompressionsrate in %.
- Bestimmen Sie die Speicherersparnis in KB.
- Die Kompressionsrate und die Speicherersparnis sollen von der Funktion zurückgegeben werden.
- Kommentieren Sie das Programm sinnvoll.

Hinweis: Sie können das Programm an dem Bild “Kunst.jpg” testen.

Aufgabe 2: (10 Punkte)

Für einen Paramenter $k \in \mathbb{N}$ ist das reelle Polynom p_k definiert durch die 3-Term-Rekursion

$$p_0(x) = 1, \quad p_1(x) = 2 - x, \quad p_{k+1}(x) = (2 - x)p_k(x) + p_{k-1}(x).$$

(a) Schreiben Sie eine Funktion

```
function y = aufgabe2a(x,k)
```

in die Datei `aufgabe2a.m`. Die Funktion soll zu gegebenem Eingabevektor $\mathtt{x} \in \mathbb{R}^n$ und Parameter `k` die Werte von $p_{\mathtt{k}}(\mathtt{x})$ in einen Vektor $\mathtt{y} \in \mathbb{R}^n$ schreiben.

Überprüfen Sie, ob die Eingabe `k` nicht negativ ist und geben Sie eine Fehlermeldung aus, falls dies nicht der Fall ist.

(b) Schreiben Sie ein MATLAB-Skript `aufgabe2b.m`, das die Funktion $f_{\mathtt{k}}$ in einem Fenster für $\mathtt{k} = 2$ und $\mathtt{k} = 4$ auf dem Intervall $[1, 3]$ graphisch darstellt. Verwenden Sie $n = 200$ äquidistante Werte zwischen 1 und 3 für `x` und beschränken Sie den y-Achsenbereich ebenfalls auf das Intervall $[1, 3]$.

Zeichnen Sie die Kurve für $\mathtt{k} = 2$ mit einer roten durchgezogenen Linie und die Kurve für $\mathtt{k} = 4$ mit einer blauen gestrichelten Linie.

Ergänzen Sie ihr Skript so, dass in der Graphik eine Legende angezeigt wird, die erklärt welche der Kurven zu $\mathtt{k} = 2$ und welche zu $\mathtt{k} = 4$ gehört. Platzieren Sie die Legende in der rechten oberen Ecke des Fensters ausserhalb der Achsen.

Aufgabe 3: (5 Punkte)

Ist $n \in \mathbb{N}$, so kann man auf der Menge $Mn := 0, 1, ..., n-1$ durch $a \oplus_n b := a + b \mod n$ eine Addition definieren. Das Paar $(Mn, \oplus_n)$ ist eine Gruppe.

(a) Schreibe eine Funktion,

```
function M = aufgabe3a(n)
```

in die Datei `aufgabe3a.m`, welche die Additionstabelle für die Gruppe $(Mn, \oplus_n)$ als $n \times n$-Matrix zurückgibt: am Eintrag (k, l) soll $(k-1) \oplus_n (l-1)$ stehen.

(b) Schreibe eine weitere Funktion

```
function M = aufgabe3b(N)
```

in die Datei `aufgabe3b.m` die für gegebenes N ein Cell Array zurückgibt, in dessen n-ten Eintrag die Additionstabelle von $(Mn, \oplus_n)$ steht.
Für das Cell Array soll zunächst Speicherplatz in der entsprechenden Größe reserviert werden.

bitte wenden

Aufgabe 4: (15 Punkte)

In einem Experiment wurden die folgenden Daten gemessen und in der Datei `aufgabe4daten.mat` abgespeichert

y_m	0.15	1.65	0.95	0.75	1.00	−0.35	1.90	2.10	3.85
$x_{1,m}$	−0.90	−0.65	−0.45	−0.15	0.00	0.20	0.35	0.60	0.85
$x_{2,m}$	−0.85	0.75	−0.30	0.95	0.00	−0.80	0.60	−0.40	0.30

Es wird angenommen, dass die Daten für drei Parameter a, b und c folgende Gesetzmässigkeit erfüllen:

$$f(x_1, x_2) = ae^{-x_2^2} + b\cos(\pi x_1) + c(x_1 + x_2).$$

(a) Schreiben Sie ein Matlab-Skript `aufgabe4.m`, welches die Messdaten aus `aufgabe4daten.mat` lädt (`load`) und die Parameter a, b und c bestimmt, sodass die Funktion f in den Punkten $(x_{1,m}, x_{2,m})$ im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate die Werte y_m bestmöglich approximiert. Berechnen Sie darüber hinaus den Fehler

$$err = \left(\sum_{m=1}^{9} |y_m - f(x_{1,m}, x_{2,m})|^2 \right)^{1/2}$$

und geben Sie ihn aus.

(b) Ergänzen Sie das MATLAB-Skript `aufgabe4.m` aus Aufgabenteil (a) um eine dreidimensionale Graphik, die sowohl die Datenpunkte $(x_{1,m}, x_{2,m}, y_m)$ als schwarze `*` enthält (`plot3`), als auch eine Flächendarstellung der Funktion f mit den in (a) berechneten Parametern im Bereich $[-1, 1] \times [-1, 1]$ (`surf`).

Stellen Sie die Fläche halbdurchsichtig (`FaceAlpha`) dar, damit auch die Datenpunkte, die hinter der Fläche liegen, zu erkennen sind.

Hinweis: Der `surf`-Befehl erwartet neben Vektoren für die x- und y-Koordinaten (`px1`, `px2`) eine Matrix `Z` mit `Z(i,j) = f(px1(j),px2(i))`. Verwenden Sie jeweils 20 gleichmäßig verteilte Werte in $[-1, 1]$ für `px1` und `px2`.