

Numerische Verfahren hyperbolischer Erhaltungsgleichungen – 2. Übungsblatt

Aufgabe 3: Betrachten Sie auf $\Omega = \mathbb{R} \times [0, \infty)$ die Advektionsgleichung mit periodischen Randbedingungen

$$\begin{aligned} \partial_t q(x, t) + u \partial_x q(x, t) &= 0, & u > 0, \\ q(x, 0) &= q_0(x), & \forall x \in \mathbb{R}, \\ q(x + 1, t) &= q(x, t), & \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{1}$$

Aus der Vorlesung kennen Sie das Upwind, Lax-Wendroff und Lax-Friedrichs Verfahren,

- Upwind Verfahren

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{uk}{h} (Q_i^n - Q_{i-1}^n),$$

- Lax-Wendroff Verfahren

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{1}{2} \gamma (Q_{i+1}^n - Q_{i-1}^n) + \frac{1}{2} \gamma^2 (Q_{i+1}^n - 2Q_i^n + Q_{i-1}^n),$$

mit $\gamma = \frac{uk}{h}$,

- Lax-Friedrichs Verfahren

$$Q_i^{n+1} = \frac{1}{2} (Q_{i-1}^n + Q_{i+1}^n) - \frac{uk}{2h} (Q_{i+1}^n - Q_{i-1}^n).$$

- (a) Diskretisieren Sie die Advektionsgleichung auf dem Intervall $[0, 1]$. Betrachten Sie dafür äquidistante Stützstellen $0 = x_{-1/2}, \dots, x_{I-1/2} = 1$ mit $x_{i-1/2} = ih$, $h = 1/I$, $I \in \mathbb{N}$, und eine konstante Zeitschrittweite k . Implementieren Sie das Upwind, Lax-Wendroff und das Lax-Friedrichs Verfahren.
- (b) Betrachten Sie das AWP (1) mit Advektionsgeschwindigkeit $u = 2$, Anfangsdaten

$$q(x, 0) = \begin{cases} 0 & : x \in [0, 1] \setminus [0.6, .08] \\ 1 & : 0.6 \leq x \leq 0.8 \end{cases}$$

und der Periodizitätsbedingung $q(t, x + 1) = q(t, x) \forall x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}^+$.

Wenden Sie die drei Verfahren auf dieses AWP an und stellen Sie die numerischen Ergebnisse der Verfahren zum Zeitpunkt $t = 1$ und $t = 2$ gemeinsam mit der exakten Lösung graphisch dar. Verwenden Sie zur Diskretisierung verschiedene Gitterweiten, z.B. $I = 50$, $I = 100$ und $I = 200$.

- (c) Betrachten Sie das AWP (1) mit Advektionsgeschwindigkeit $u = 1$, Anfangsdaten

$$q(x, 0) = \sin(2\pi nx), \quad \text{für } x \in [0, 1], \quad n = 10$$

und der Periodizitätsbedingung $q(x + 1, t) = q(x, t) \forall x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}^+$.

Stellen Sie auch für diese Anfangsdaten die numerische Lösungen der Verfahren zum Zeitpunkt $t = 10$ zusammen mit der exakten Lösung graphisch dar.

Aufgabe 4: Sei

$$A_\epsilon = -\frac{u}{2h} \begin{pmatrix} 0 & 1 & & -1 \\ -1 & 0 & 1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & -1 & 0 & 1 \\ 1 & & & -1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{\epsilon}{h^2} \begin{pmatrix} -2 & 1 & & & 1 \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -2 & 1 \\ 1 & & & & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

(a) Beweisen Sie Lemma 2.4: Die Eigenwerte von A_ϵ haben die Form

$$\lambda_p = -\frac{iu}{h} \sin(2\pi ph) - \frac{2\epsilon}{h^2} (1 - \cos(2\pi ph))$$

und die zugehörigen Eigenvektoren haben die Komponenten

$$w_j^p = \exp(2\pi i p j h), \quad j = 1, \dots, m+1.$$

(b) Plotten Sie für $h = 1/50$, $k = 0.8h$ und $u = 1$ die Einträge von $k\lambda$ und den Einheitskreis mit Mittelpunkt $(-1, 0)$ für $\epsilon = \frac{h^2}{2k}$ (Lax-Friedrich) und $\epsilon = \frac{ku^2}{2}$ (Lax-Wendroff) jeweils in einen Plot.

Aufgabe 5: Beweisen Sie Parseval's Beziehung für Gitterfunktionen

$$\|Q^n\|_2 = \|\hat{Q}^n\|_2.$$

Aufgabe 6: Betrachten Sie ein allgemeines explizites zentriertes Differenzenverfahren der Form

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{uk}{2h} (Q_{i+1}^n - Q_{i-1}^n) + \sigma \frac{k}{h^2} (Q_{i-1}^n - 2Q_i^n + Q_{i+1}^n). \quad (2)$$

Für $\sigma = \frac{ku^2}{2}$ handelt es sich um das Lax-Wendroff-Verfahren, für $\sigma = \frac{h^2}{2k}$ um das Lax-Friedrichs-Verfahren.

Führen Sie eine von Neumann Stabilitätsanalyse für ein allgemeines explizites zentriertes Differenzenverfahren (2) durch. Betrachten Sie auch den Fall $\sigma = \frac{h^2}{2k}$. Was passiert für größere σ ?