Heinrich Heine Universität Düsseldorf

MATHEMATISCHES INSTITUT
PROF. DR. CHRISTIANE HELZEL
AMELIE PORFETYE

16. APRIL 2026

Numerische Verfahren hyperbolischer Erhaltungsgleichungen – 1. Übungsblatt

Aufgabe 1: (*Wärmeleitungsgleichung*)

Wir betrachten die Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x,t) = \kappa \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t) \tag{1}$$

mit Anfangsdaten $u(x,0) = \eta(x)$, $0 \leq x \leq 1$ und Randdaten $u(0,t) = g_0(t)$, $u(1,t) = g_1(t)$, $t > 0$, wobei $\kappa > 0$.

(a) Lesen Sie die Kapitel 9 bis 9.5 aus *Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations* von Randall J. LeVeque. Dieses ist im Online-Katalog der ULB unter https://katalog.ulb.hhu.de/Record/990027771860206443 verfügbar.

Es werden zwei Methoden zur numerischen Approximation der Lösung von (1) vorgestellt:

1. explizites Euler Verfahren: $U^{n+1} = U^n + k(AU^n + g(t_n))$
2. Crank–Nicolson Verfahren: $U^{n+1} = U^n + \frac{k}{2}(AU^n + g(t_n) + AU^{n+1} + g(t_{n+1}))$

Dabei sind

$$U^n = \begin{bmatrix} U_1^n \\ U_2^n \\ \vdots \\ U_{m-1}^n \\ U_m^n \end{bmatrix}, \quad A = \frac{\kappa}{h^2} \begin{bmatrix} -2 & 1 & & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & 1 & -2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times m}, \quad g(t) = \frac{\kappa}{h^2} \begin{bmatrix} g_0(t) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g_1(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m.$$

(b) Implementieren Sie beide Methoden. Diese sollen einen Startvektor `U`, die Randdaten als Lambdafunktionen `g0` und `g1`, den Wärmeleitkoeffizient `kappa` und die Endzeit `tfinal` übergeben bekommen. Wählen Sie für die erste Methode den Zeitschritt maximal und setzen Sie für die zweite $k = h$.

Seien

$$\begin{aligned} \eta(x) &= \exp(-150(x-0.4)^2), \\ g_0(t) &= \frac{1}{\sqrt{600\kappa t + 1}} \exp\left(-\frac{0.4^2}{4\kappa t + \frac{1}{150}}\right), \\ g_1(t) &= \frac{1}{\sqrt{600\kappa t + 1}} \exp\left(-\frac{0.6^2}{4\kappa t + \frac{1}{150}}\right). \end{aligned}$$

Dann ist die exakte Lösung gegeben durch

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{600\kappa t + 1}} \exp\left(-\frac{(x-0.4)^2}{4\kappa t + \frac{1}{150}}\right).$$

(c) Plotten Sie für $m = 50$ für beide Methoden die numerische und die exakte Lösung jeweils in einen Plot.

(d) Berechnen Sie für $m = 100$ die numerische Lösung beider Methoden und messen Sie dabei jeweils die benötigte Zeit.

(e) Nutzen Sie die in den Teilen (c) und (d) berechneten Lösungen, um die experimentelle Konvergenzrate (EOC) der beiden Verfahren zu bestimmen. Diese lässt sich wie folgt herleiten:

Wir nehmen an, dass $||U_h - U_{h,exa}|| \leq Ch^\alpha$. Dabei ist U_h die mit Gitterweite h berechnete Lösung, $U_{h,exa}$ die exakte Lösung ausgewertet auf dem Gitter auf dem U_h berechnet wurde, $||\cdot||$ eine Gitterfunktionsnorm, C eine Konstante und EOC $= \alpha$ die gesuchte Konvergenzrate.

Analog sei $||U_{h/2} - U_{h/2,exa}|| \leq C(h/2)^\alpha$. Unter der Annahme der Exaktheit beider Ungleichungen folgt

$$\frac{||U_{h/2} - U_{h/2,exa}||}{||U_h - U_{h,exa}||} = (1/2)^\alpha$$

und somit

$$\alpha = \frac{1}{\ln(1/2)} \ln\left(\frac{||U_{h/2} - U_{h/2,exa}||}{||U_h - U_{h,exa}||}\right).$$

Aufgabe 2:

Beweisen Sie Satz 2.1 aus der Vorlesung.