MATHEMATISCHES INSTITUT

PROF. DR. CHRISTIANE HELZEL
DAVID KERKMANN

30. MAI 2019

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

31	32	33	Σ

NAME: ____________________

MAT-NR.: ____________________

Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen – 9. Übungsblatt

Aufgabe 31: (6 Punkte)

Bestimmen Sie die charakteristischen Polynome $\rho(\zeta)$ und $\sigma(\zeta)$ für die folgenden linearen Mehrschrittverfahren. Verifizieren Sie die Konsistenz der beiden Verfahren.

(a) 3-Schritt Adams-Bashforth Verfahren

$$U^{n+3} = U^{n+2} + \frac{k}{12}\left(5f(U^n) - 16f(U^{n+1}) + 23f(U^{n+2})\right)$$

(b) 3-Schritt Adams-Moulton Verfahren

$$U^{n+3} = U^{n+2} + \frac{k}{24}\left(f(U^n) - 5f(U^{n+1}) + 19f(U^{n+2}) + 9f(U^{n+3})\right)$$

Aufgabe 32: (6 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass das Prediktor-Korrektor Verfahren

$$\hat{U}^{n+1} = U^n + kf(U^n) \qquad \text{(Prediktor)}$$
$$U^{n+1} = U^n + \frac{k}{2}\left(f(U^n) + f(\hat{U}^{n+1})\right) \qquad \text{(Korrektor)}$$

Konsistenzordnung 2 besitzt.

(b) Die Prediktor-Korrektor Methode bestehend aus dem 2-Schritt Adams-Bashforth Verfahren als Prediktor und dem 2-Schritt Adams-Moulton Verfahren als Korrektor besitzt Konsistenzordnung 3. Implementieren Sie dieses Verfahren und testen Sie es an folgendem Beispiel. Verwenden Sie für den ersten Schritt ein Verfahren zweiter Ordnung. Plotten Sie ihr Ergebnis in einen 3d-Plot.

$$\begin{aligned} x'(t) &= -Px(t) + Py(t) \\ y'(t) &= rx(t) - y(t) - x(t)z(t) \\ z'(t) &= x(t)y(t) - bz(t) \end{aligned}$$

mit $x(0) = y(0) = z(0) = 1$, $P = 10$, $r = 28$, $b = \frac{8}{3}$, $T = 250$, $k = 0.01$.

b.w.

Aufgabe 33: (6 Punkte)

Betrachten Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} u'(t) &= -\lambda u(t),\ t > t_0 \\ u(t_0) &= \eta. \end{aligned}$$

In der Vorlesung haben Sie in dem Beweis zur Konvergenz des expliziten Euler Verfahrens gesehen, dass folgende Abschätzung gilt:

$$\|E^n\|_\infty \leq e^{|\lambda|T} T \|\tau\|_\infty$$

mit

$$\|\tau\|_\infty \leq \max_{t_0 \leq t \leq T} |\tau(u, t, k)|.$$

Berechnen Sie für $\lambda = 10^2$, $T = 1$, $t_0 = 0$, $\eta = 1$, das größte k, sodass nach dieser Abschätzung $\|E^n\|_\infty \leq 10^{-3}$ gilt, indem Sie für $|\tau(u, t, k)|$ nur den $\mathcal{O}(k)$ Term betrachten.

Überprüfen Sie anschließen mit einem Programm, für welches ungefähre k man noch sinnvolle Ergebnisse erhält und geben Sie dieses an. Das Programm brauchen Sie nicht mit abzugeben.

Abgabe am 6. Juni 2019 am Beginn der Vorlesung.
Abgabe der Programmieraufgaben bis zum 6. Juni 2019 um 10:30 Uhr an david.kerkmann@hhu.de.
Besprechung in den Übungen am 11. Juni 2019.