MATHEMATISCHES INSTITUT
PROF. DR. CHRISTIANE HELZEL
DAVID KERKMANN

23. MAI 2019

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

28	29	30	Σ

NAME: ____________________

MAT-NR.: ____________________

Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen – 8. Übungsblatt

Aufgabe 28: (6 Punkte)

Bestimmen Sie die Koeffizienten β_0, β_1, β_2 des 2-Schritt Adams-Moulton Verfahrens auf zwei verschiedenen Wegen:

(a) Unter Verwendung der in der Vorlesung hergeleiteten Konsistenzbedingungen.

(b) Unter Verwendung der Beziehung

$$u(t_{n+2}) = u(t_{n+1}) + \int_{t_{n+1}}^{t_{n+2}} f(u(s))ds.$$

Approximieren Sie das Integral, indem Sie das Interpolationspolynom durch $f(U^n)$, $f(U^{n+1})$ und $f(U^{n+2})$ exakt integrieren.

Aufgabe 29: (6 Punkte)

Bei einem Mehrschrittverfahren p-ter Ordnung erhält man bereits die volle Ordnung, falls die Startwerte mit einem Verfahren der Ordnung $p-1$ berechnet werden.

Verifizieren Sie diese Behauptung, indem Sie U^1 unter Verwendung des expliziten Euler Verfahrens und $U^2, U^3, \ldots$ mit Hilfe der Mittelpunktregel

$$U^{n+1} = U^{n-1} + 2kf(U^n)$$

berechnen.

Schreiben Sie ein Matlab Programm und wenden Sie es auf eine einfache gewöhnliche Differentialgleichung an. Überprüfen Sie auf diese experimentelle Weise, dass der beschriebene Ansatz eine Approximation zweiter Ordnung liefert.

b.w.

Aufgabe 30: (6 Punkte)

Implementieren Sie das eingebettete Runge-Kutta Verfahren, das das Heun-Verfahren mit dem expliziten Euler-Verfahren kombiniert. Das resultierende Verfahren hat folgendes erweitertes Butcher Tableau:

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ 1 & 1 & \\ \hline & 1/2 & 1/2 \\ & 1 & 0 \end{array}$$

Sei nun in einem Zeitschritt t_n die aktuelle Lösung U^n sowie eine Schrittweite k_n gegeben. Gehen Sie dann wie folgt vor:

1. Berechnen Sie die Lösung zum nächsten Zeitpunkt $t_{n+1} = t_n + k_n$ mit beiden Verfahren, ohne Funktionsauswertungen doppelt zu berechnen.

2. Seien U^{n+1} die Lösung mit dem Heun-Verfahren und $\hat{U}^{n+1}$ die Lösung des expliziten Euler-Verfahrens. Dann ist $err := \|U^{n+1} - \hat{U}^{n+1}\|_\infty$ eine Schätzung für den Einschrittfehler. Berechne damit einen neuen Zeitschritt

$$\hat{k} := k_n \min\left\{2, \max\left\{0.2, 0.9\sqrt{\frac{\epsilon}{err}}\right\}\right\},$$

   wobei ϵ eine vorgegebene Fehlertoleranz ist.

3. Ist $err \leq \epsilon$, so war der Schritt genau genug und er wird akzeptiert, das heißt U^{n+1} ist nun die gefundene Approximation zur neuen Zeit t_{n+1}. Setze dann $k_{n+1} = \hat{k}$ und führe das Verfahren weiter fort, beginnend mit Schritt 1.

4. Ist $err > \epsilon$, so war der Schritt zu ungenau und er wird wiederholt: Setze $k_n = \hat{k}$ und wiederhole den aktuellen Zeitschritt, beginnend mit Schritt 1.

Testen Sie ihr Verfahren für $\epsilon = 10^{-6}$ an dem Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} c'(t) &= c(t)(1 - c(t)) - f_1(c(t))u(t) \\ u'(t) &= f_1(c(t))u(t) - f_2(u(t))v(t) - d_1 u(t) \\ v'(t) &= f_2(u(t))v(t) - d_2 v(t) \\ c(0) &= 0.4 \\ u(0) &= 1 \\ v(0) &= 9 \end{aligned}$$

mit

$$f_i(z) = \frac{a_i z}{1 + b_i z}, \quad i = 1, 2$$

und Parametern $a_1 = 5$, $a_2 = 0.1$, $b_1 = 3.5$, $b_2 = 2$, $d_1 = 0.4$, $d_2 = 0.01$ bis zur Zeit $T = 3000$ mit Startschrittweite $k_0 = 1$ und geben Sie in jedem Schritt die akzeptierte Schrittweite aus. Zeichnen Sie auch die Graphen von c, u und v im Intervall $[2000, 3000]$.

Abgabe aufgrund des Feiertags bis zum 31. Mai 2019 um 14:00 Uhr. Die Abgabe darf auch elektronisch erfolgen an david.kerkmann@hhu.de. Bitte achten Sie dann darauf, den Anhang der E-Mail möglichst klein zu halten.
Abgabe der Programmieraufgaben bis zum 31. Mai 2019 um 14:00 Uhr an david.kerkmann@hhu.de.
Besprechung in den Übungen am 4. Juni 2019.