MATHEMATISCHES INSTITUT

PROF. DR. CHRISTIANE HELZEL
DAVID KERKMANN

16. MAI 2019

24	25	26	27	Σ

NAME: ____________________

MAT-NR.: ____________________

Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen – 7. Übungsblatt

Aufgabe 24: (6 Punkte)

Beweisen Sie die folgende Aussage:

Ein explizites Runge-Kutta Verfahren (b,c,A) ist genau dann invariant gegen Autonomisierung, wenn es konsistent ist und

$$c_i = \sum_{j=1}^{r} a_{ij} \qquad \text{für } i = 1, \ldots, s$$

erfüllt.

Aufgabe 25: (6 Punkte)

Bestimmen Sie die Konsistenzordnung der folgenden Runge-Kutta Verfahren:

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & & & & \\ 1/2 & 1/2 & & & \\ 1 & 0 & 1 & & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & \\ \hline & 1/6 & 2/3 & 0 & 1/6 \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ 1/3 & 1/3 & & \\ 2/3 & 0 & 2/3 & \\ \hline & 1/4 & 0 & 3/4 \end{array}$$

Aufgabe 26: (6 Punkte)

Leiten Sie die Koeffizienten (b, A) für die Kuttasche 3/8-Regel her, das heißt finden sie zu

$$c = \left(0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right)^T$$

Koeffizienten b und A, sodass das zugehörige explizite Runge-Kutta Verfahren (b, A), das invariant gegen Autonomisierung ist, eine möglichst hohe Konsistenzordnung besitzt.

b.w.

Aufgabe 27: (6 Punkte)

Die DGL

$$x'' = -\frac{x}{r^3}, \qquad x(0) = 1-\epsilon, \quad x'(0) = 0,$$
$$y'' = -\frac{y}{r^3}, \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = \sqrt{\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}},$$
$$r^2 = x^2 + y^2$$

beschreibt eine orbitale Bahn in zwei Raumdimensionen. Die exakte Lösung ist gegeben durch

$$x = \cos(u) - \epsilon,$$
$$y = \sqrt{1-\epsilon^2}\sin(u),$$

wobei u die Gleichung

$$u - \epsilon\sin(u) - t = 0$$

erfüllt.

(a) Formulieren Sie die DGL als System erster Ordnung.

(b) Plotten Sie die exakte Lösung für $t \in [0, 20]$. Das Intervall sollte dabei in mindestens 100 Punkte unterteilt werden.

Hinweis: Zur Bestimmung von u können Sie eine beliebige Implementation des Newton Algorithmus verwenden.

(c) Implementieren Sie das explizite Euler Verfahren.

(d) Implementieren Sie das verbesserte Euler Verfahren.

(e) Implementieren Sie das klassische RK Verfahren 4. Ordnung.

(f) Wenden Sie die drei implementierten Verfahren auf obiges Testbeispiel an. Plotten Sie die numerischen Lösungen zusammen mit der exakten Lösung für $t \in [0, 20]$, $k = \frac{20}{100}, \frac{20}{200}, \frac{20}{400}$ und $\epsilon = 0.1, 0.3$.

Abgabe am 23. Mai 2019 am Beginn der Vorlesung.
Abgabe der Programmieraufgaben bis zum 23. Mai 2019 um 10:30 an david.kerkmann@hhu.de.
Besprechung in den Übungen am 28. Mai 2019.