MATHEMATISCHES INSTITUT

PROF. DR. CHRISTIANE HELZEL
DAVID KERKMANN

2. MAI 2019

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

16	17	18	19	Σ

NAME: ____________________

MAT-NR.: ____________________

Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen – 5. Übungsblatt

Aufgabe 16: (6 Punkte)

Wir wollen das RWP

$$\begin{aligned} u''(x) &= f(x) \quad \text{auf } 0 < x < 1 \\ u'(0) &= \sigma \\ u(1) &= \beta. \end{aligned}$$

unter Verwendung von *deferred correction* lösen. Wie muss das Gleichungssystem aufgestellt werden, damit wir ein Verfahren vierter Ordnung erhalten? Geben Sie zwei Möglichkeiten an.

Aufgabe 17: (6 Punkte)

Betrachten Sie für $0 < \varepsilon \ll 1$ das nichtlineare Randwertproblem

$$\begin{aligned} \varepsilon u''(x) + u(x)(u'(x) - 1) &= 0 \quad \text{auf } a \le x \le b, \\ u(a) &= \alpha, \\ u(b) &= \beta. \end{aligned}$$

Wie lassen sich Position und Breite der möglichen (internen) Schicht abschätzen?

Erstellen Sie dazu eine Ausarbeitung basierend auf Kapitel 2.17.1 aus LeVeques Buch *Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations* (siehe Vorlesungsseite).

b.w.

Aufgabe 18: (6 Punkte)

Es seien $u, f : \Omega \to \mathbb{R}$ Funktionen mit $u, f \in C^\infty(\Omega)$. $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ sei das Einheitsquadrat. Betrachte auf Ω die Poisson Gleichung $\Delta u = f$ mit Dirichlet Randbedingungen.

Wir benutzen ein gleichmäßiges kartesisches Gitter mit Gitterweite $h = \Delta x = \Delta y$ und Gitterpunkten (x_i, y_j), wobei $x_i = ih$, $y_j = jh$ sei. Für die Diskretisierung des Laplace-Operators an den inneren Punkten des Gebiets verwenden wir den 9-Punkte-Stern (Mehrstellenformel)

$$\begin{aligned}\Delta_9 u_{i,j} :=& \frac{1}{6h^2}\Big[4u_{i-1,j} + 4u_{i+1,j} + 4u_{i,j-1} + 4u_{i,j+1} \\ &+ u_{i-1,j-1} + u_{i-1,j+1} + u_{i+1,j-1} + u_{i+1,j+1} - 20u_{i,j}\Big]\end{aligned}$$

(a) Sei $f_{i,j} = f(x_i, y_j)$. Zeigen Sie, dass

$$\Delta_9 u_{i,j} = f_{i,j}$$

eine konsistente Approximation 2. Ordnung für die Poisson Gleichung ist.

(b) Unter welchen Umständen ist die Approximation aus (a) 4. Ordnung?

Sei

$$\begin{aligned}F_{i,j} &= f_{i,j} + \frac{h^2}{12}\Delta_5 f_{i,j} \\ &= f_{i,j} + \frac{1}{12}\left(f_{i-1,j} + f_{i+1,j} + f_{i,j-1} + f_{i,j+1} - 4f_{i,j}\right).\end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass

$$\Delta_9 u_{i,j} = F_{i,j}$$

eine konsistente Approximation 4. Ordnung für die Poisson Gleichung ist.

Aufgabe 19: (6 Punkte)

Das Matlab Skript `poisson.m` unter

`http://faculty.washington.edu/rjl/fdmbook/matlab/poisson.m`

oder das Python Skript `poisson2d.py` auf der Vorlesungsseite approximiert das Poisson-Problem auf einem quadratischen Gebiet mit $(m+2) \times (m+2)$ Gitterpunkten $\left(\Delta x = \Delta y = h = \frac{1}{m+1}\right)$ unter Verwendung des 5-Punkte-Sterns.

Machen Sie sich mit der Funktionsweise dieses Programms vertraut. Welches Randwertproblem wird approximiert?

Modifizieren Sie das Matlab oder Python Skript, sodass der 9-Punkte-Stern zur Diskretisierung des Laplace-Operators verwendet wird. Modifizieren Sie zusätzlich die rechte Seite (wie in Aufgabe 18 (b) beschrieben) um ein Verfahren 4. Ordnung zu erhalten.

Verifizieren Sie die Konvergenzrate des Verfahrens.

Abgabe am 9. Mai 2019 am Beginn der Vorlesung.
Abgabe der Programmieraufgaben bis zum 9. Mai 2019 um 10:30 an david.kerkmann@hhu.de.
Besprechung in den Übungen am 14. Mai 2019.