MATHEMATISCHES INSTITUT

PROF. DR. CHRISTIANE HELZEL
DAVID KERKMANN

25. APRIL 2019

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

12	13	14	15	Σ

NAME: ____________________

MAT-NR.: ____________________

Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen – 4. Übungsblatt

Aufgabe 12: (6 Punkte)

Wir betrachten auf $[0,1]$ das Randwertproblem

$$\begin{aligned} -\varepsilon u''(x) + b(x)u'(x) + c(x)u(x) &= f(x) \quad \text{auf } 0 < x < 1 \\ u(0) &= 0 \\ u(1) &= 0 \end{aligned}$$

mit $0 < \varepsilon \ll 1$ und Funktionen $c, b : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $c(x) \geq \lambda > 0$ für alle $x \in [0,1]$.

Für die Diskretisierung benutzen wir ein äquidistantes Gitter mit $h = 1/(m+1)$. Zeigen Sie, dass das Differenzenverfahren

$$-\varepsilon \frac{U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}}{h^2} + \frac{b_i}{h} \left\{ \begin{array}{lcl} U_i - U_{i-1} & : & b_i \geq 0 \\ U_{i+1} - U_i & : & b_i < 0 \end{array} \right\} + c_i U_i = f_i, \quad U_0 = U_{m+1} = 0$$

bezüglich der $\|\cdot\|_\infty$-Norm gleichmäßig in ε stabil ist.

Hinweis: Zeigen Sie, dass die Koeffizientenmatrix des Finiten-Differenzen-Verfahrens diagonaldominant ist. Wie können Sie daraus die Stabilitätsaussage folgern?

Aufgabe 13: (6 Punkte)

Betrachten Sie die in der Vorlesung vorgestellte Pendelgleichung

$$\begin{aligned} \theta''(t) &= -\sin(\theta(t)) \quad \text{auf } 0 < t < 2\pi, \\ \theta(0) &= \alpha, \\ \theta(2\pi) &= \alpha. \end{aligned}$$

Wählen Sie ein äquidistantes Gitter und betrachten Sie die Diskretisierung

$$\begin{aligned} \frac{1}{h^2}(\theta_{i-1} - 2\theta_i + \theta_{i+1}) + \sin(\theta_i) &= 0, \quad i = 1, ..., m, \\ \theta_0 &= \alpha, \\ \theta_{m+1} &= \alpha. \end{aligned}$$

Dies ist ein nichtlineares Gleichungssystem der Form $G(\theta) = 0$, $G : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$.
Implementieren Sie für diese Gleichung das Newton-Verfahren

$$\begin{aligned} \theta^{[k+1]} &= \theta^{[k]} + \delta^{[k]}, \\ J(\theta^{[k]})\delta^{[k]} &= -G(\theta^{[k]}), \end{aligned}$$

wobei $\theta^{[k]}$ eine Näherung an θ im Schritt k darstellt und J die Jacobi-Matrix der Funktion G ist. Wählen Sie die konstante Startlösung $\theta_i^{[0]} = 0.7 \quad \forall i = 0, ..., m+1$. Plotten Sie ihre Lösung nach einigen Newton-Schritten und geben Sie $||\delta^{[k]}||_\infty = \max_k(|\delta^{[k]}|)$ aus. Wie Sie in der Vorlesung gesehen haben, besitzt dieses Randwertproblem keine eindeutige Lösung. Wählen Sie mindestens eine weitere Startlösung, sodass sich eine andere Lösung ergibt, und plotten Sie auch diese.

b.w.

Aufgabe 14: (6 Punkte)

Betrachten Sie das Randwertproblem

$$\begin{aligned} u''(x) &= f(x) \quad \text{auf } 0 < x < 1 \\ u'(0) &= \sigma_1 \\ u'(1) &= \sigma_2. \end{aligned}$$

(a) Bestimmen Sie eine analytische Bedingung, unter der es mindestens eine Lösung des Randwertproblems gibt.

(b) Zur numerischen Approximation von Lösungen dieses Randwertproblems benutzen wir eine Diskretisierung der Form $AU = F$:

$$\frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} -h & h & & & & & & \\ 1 & -2 & 1 & & & & & \\ & 1 & -2 & 1 & & & & \\ & & 1 & -2 & 1 & & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & & 1 & -2 & 1 & \\ & & & & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & & & h & -h \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U_0 \\ U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ \vdots \\ U_{m-1} \\ U_m \\ U_{m+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1 + \frac{h}{2}f(x_0) \\ f(x_1) \\ f(x_2) \\ f(x_3) \\ \vdots \\ f(x_{m-1}) \\ f(x_m) \\ -\sigma_2 + \frac{h}{2}f(x_{m+1}) \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie auch hierzu eine Bedingung, wann es mindestens eine Lösung des Gleichungssystems gibt.

(c) Erkennen Sie eine Beziehung zwischen den beiden Bedingungen?

Aufgabe 15: (6 Punkte)

Beweisen Sie Lemma 2.17 der Vorlesung.

Abgabe am 2. Mai 2019 am Beginn der Vorlesung.
Abgabe der Programmieraufgaben bis zum 2. Mai 2019 um 10:30 an david.kerkmann@hhu.de.
Besprechung in den Übungen am 7. Mai 2019.