MATHEMATISCHES INSTITUT

PROF. DR. CHRISTIANE HELZEL
DAVID KERKMANN

18. APRIL 2019

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

9	10	11	Σ

NAME: ____________________

MAT-NR.: ____________________

Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen – 3. Übungsblatt

Aufgabe 9: (6 Punkte)

(a) Bestimmen Sie die Greenschen Funktionen für das Randwertproblem

$$\begin{aligned} u''(x) &= f(x) \quad \text{auf } 0 < x < 1 \\ u'(0) &= \sigma \\ u(1) &= \beta. \end{aligned}$$

Hinweis: Bestimmen Sie die Funktion $G(x;\overline{x})$, welche das Randwertproblem

$$u''(x) = \delta(x - \overline{x}), \quad u'(0) = 0, \; u(1) = 0$$

löst. Weiterhin bestimmen Sie die Funktionen $G_0(x)$ als Lösung von

$$u''(x) = 0, \quad u'(0) = 1, \; u(1) = 0$$

und $G_1(x)$ als Lösung von

$$u''(x) = 0, \quad u'(0) = 0, \; u(1) = 1.$$

(b) Geben Sie mit Hilfe der Greenschen Funktionen die Lösung des obigen Randwertproblems an.

Aufgabe 10: (6 Punkte)

Wir betrachten das Randwertproblem

$$\begin{aligned} u''(x) &= f(x) \quad \text{auf } 0 < x < 1 \\ u'(0) &= \sigma \\ u(1) &= \beta. \end{aligned}$$

Zur numerischen Approximation von Lösungen dieses Randwertproblems benutzen wir eine Diskretisierung der Form $AU = F$:

$$\frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} -h & h & & & & & & \\ 1 & -2 & 1 & & & & & \\ & 1 & -2 & 1 & & & & \\ & & 1 & -2 & 1 & & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & & 1 & -2 & 1 & \\ & & & & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & & & 0 & h^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_0 \\ U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ \vdots \\ U_{m-1} \\ U_m \\ U_{m+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma \\ f(x_1) \\ f(x_2) \\ f(x_3) \\ \vdots \\ f(x_{m-1}) \\ f(x_m) \\ \beta \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Inverse der Matrix A.

Hinweis: Benutzen Sie Aufgabe 9.

(b) Zeigen Sie, dass der globale Fehler dieses Verfahrens von der Ordnung $\mathcal{O}(h)$ ist.

b.w.

Aufgabe 11: (6 Punkte)

(a) Implementieren Sie das Finite-Differenzen-Verfahren mithilfe der üblichen zentrierten Differenz zweiter Ordnung für die zweite Ableitung für das Randwertproblem $u''(x) = f(x)$ auf $0 < x < 1$. Schreiben Sie dazu eine Funktion, die als Eingabe die Funktion f, die Anzahl der Gitterpunkte $m + 2$ für ein äquidistantes Gitter, beide Randwerte, eine Zuweisung, ob die Randwerte jeweils Dirichlet oder Neumann Randbedingungen sind, sowie einen Paramter $ord \in \{1, 2\}$, der im Falle einer Neumann Randbedingung die Ordnung angibt, erhält. Die Rückgabe soll aus dem Vektor U der numerischen Lösung bestehen. Falls das Randwertproblem nicht wohlgestellt ist, soll eine Fehlermeldung ausgegeben werden.

(b) Führen Sie eine experimentelle Konvergenzstudie mit dem Randwertproblem

$$\begin{aligned} u''(x) &= \exp(x) \quad \text{auf } 0 < x < 1 \\ u'(0) &= 0 \\ u(1) &= 0 \end{aligned}$$

durch. Betrachten Sie dabei sowohl die Fälle $ord = 1$ als auch $ord = 2$.

Vergleichen Sie das Resultat mit dem theoretischen aus Aufgabe 10 (b).

Hinweis: Wie können wir experimentell für dieses Beispiel die Konvergenzrate des numerischen Verfahrens überprüfen?

- Für dieses Beispiel können Sie leicht die exakte Lösung $u(x)$ bestimmen.
- Unter Verwendung der exakten Lösung können Sie für ein festes h die Gitterfunktion des globalen Fehlers $E = U - \hat{U}$ bestimmen.
- Berechnen Sie $\|E^h\|$ unter Verwendung einer Gitterfunktionsnorm.
- Verwenden Sie nun eine andere Gitterweite, beispielsweise $\frac{h}{2}$ und berechnen Sie $\|E^{\frac{h}{2}}\|$.
- Die experimentelle Konvergenzrate (EOC) des Verfahrens lässt sich dann unter Verwendung der Formel

  $$EOC = \frac{\ln\left(\|E^h\| / \|E^{\frac{h}{2}}\|\right)}{\ln 2}$$

  bestimmen.

Abgabe am 25. April 2019 am Beginn der Vorlesung.
Abgabe der Programmieraufgaben bis zum 25. April 2019 um 10:30 an david.kerkmann@hhu.de.
Besprechung in den Übungen am 30. April 2019.