MATHEMATISCHES INSTITUT

PROF. DR. CHRISTIANE HELZEL
DAVID KERKMANN

11. APRIL 2019

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

5	6	7	8	Σ

NAME: ____________________

MAT-NR.: ____________________

Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen – 2. Übungsblatt

Aufgabe 5: (8 Punkte)

Wir betrachten Finite-Differenzen-Approximationen der Form

$$u^{(k)}(\bar{x}) = c_0^k u(x_0) + c_1^k u(x_1) + \ldots + c_n^k u(x_n).$$

In der Vorlesung haben Sie die Methode von Fornberg kennengelernt. Diese rechnet effizient nicht nur die Koeffizienten der gewünschten Ableitung, sondern auch aller niedrigeren Ableitungen aus.

(a) Implementieren Sie die Methode von Fornberg, indem Sie eine Funktion schreiben, die als Eingabe die Stelle $\bar{x}$, die Auswertungsstellen $x_0, \ldots, x_n$ sowie die gewünschte Ableitung k erhält und als Rückgabe eine Matrix $C \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(k+1)}$ wiedergibt, die alle Koeffizienten c_i^l, $0 \le i \le n$, $0 \le l \le k$, enthält.

Einen Link auf die Arbeit von Fornberg finden Sie auf der Vorlesungswebsite.

(b) Für $m > 0$ sei nun ein Gitter $\hat{x}_0 < \ldots < \hat{x}_m$ gegeben. Die Auswertungen der Funktion f auf dem Gitter sei $\hat{f} = [f(\hat{x}_0), \ldots, f(\hat{x}_m)]^T$. Wir möchten eine Approximation an die erste Ableitung von f an allen Stellen des Gitters berechnen und schreiben dies als Matrixmultiplikation $\hat{f}' = D\hat{f}$, wobei D die Einträge der Finiten-Differenzen-Formeln enthält. Schreiben Sie eine Funktion, die zu einem gegebenen Gitter die Matrix D bestimmt, indem sie die Methode von Fornberg aus Teil (a) benutzt, und danach die Approximation für $\hat{f}'$ bestimmt und zurückgibt. Dabei soll eine zentrierte Differenz mit fünf Auswertungsstellen verwendet werden ($n = 4, x_2 = \bar{x}$). Betrachten Sie die folgenden zwei Fälle:

- f ist periodisch mit Periode $\hat{x}_m - \hat{x}_0$.
- Über f ist nichts weiter bekannt.

Hinweis: Überlegen Sie sich im ersten Fall, wie Sie die Matrix zu besetzen haben, um die Periodizität eingehen zu lassen. Im zweiten Fall können Sie für Stellen in der Nähe des Randes keine zentrierte Differenz verwenden. Benutzen Sie dort eine geeignete andere Finite-Differenzen-Approximation mit fünf Auswertungsstellen.

Hinweis: Sollten Sie Teil (a) nicht bearbeitet haben, können Sie hierzu die Datei *FDcoeffV.py* von der Vorlesungsseite verwenden, die die Vandermonde-Matrix zur Bestimmung der Koeffizienten verwendet.

(c) Testen Sie Ihre Funktion aus (b) an den ersten Ableitungen der Funktionen $f(x) = \sin(x)$ und $g(x) = x\sin(x)$ auf dem Intervall $[0, 2\pi]$, indem Sie die exakte Ableitung sowie die numerische Ableitung aus (b) zeichnet. Wählen Sie selbstständig ein geeignetes Gitter.

b.w.

Aufgabe 6: (6 Punkte)

Sei $u''(x) = f(x), u(0) = u(1) = 0$ und $h = 0.25$.

(a) Sei A die Matrix aus dem Gleichungssystem $AU = F$ wie im Abschnitt zu den Randwertproblemen in der Vorlesung. Das Gitter bestehe aus fünf äquidistanten Punkten mit $U_0 = u(0)$ und $U_4 = u(1)$. Schreiben Sie A aus und bestimmen Sie ihre Inverse.

(b) Wie sähe das Gleichungssystem und insbesondere die Matrix aus, wenn die Randwerte nicht direkt auf die rechte Seite F gebracht würden?

(c) Sei $f(x) = x$. Bestimmen Sie die diskrete Lösung des Randwertproblems mit der gegebenen Finite-Differenzen-Approximation und dem gegebenen Gitter. Geben Sie außerdem die exakte Lösung der Gleichung an und vergleichen Sie die beiden Lösungen, indem Sie den globalen Fehler auf dem Gitter angeben. Begründen Sie, warum der Fehler diese spezielle Form hat!

Aufgabe 7: (4 Punkte)

Betrachten Sie erneut Aufgabe 3 von Blatt 1. Falls Sie die Aufgabe nicht gemacht haben, können Sie sich eine Lösung von der Webseite herunterladen. Testen Sie das Programm an der Finite-Differenzen-Formel

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} =: D_0^h\{f\}(x)$$

mit einer großen Reichweite von h, sodass Sie insbesondere sehr kleine h betrachten. Was für ein Verhalten zeigt der Fehler? (Hier müssen Sie kein Programm abgeben, eine Erläuterung der Beobachtungen mit Skizze reicht.)

Bei der Auswertung einer Funktion in der Gleitkommadarstellung wird gerundet. Es sei $\bar{f}(x) = f(x) + \epsilon(x)$ der gerundete Wert, wobei $|\epsilon(x)| \leq \bar{\epsilon}$. $\bar{\epsilon} > 0$ steht dabei in direktem Zusammenhang mit der Maschinengenauigkeit (für *double precision* etwa $2.2 \cdot 10^{-16}$).

Bestimmen Sie eine obere Schranke an $|D_0^h\{\bar{f}\}(x) - D_0^h\{f\}(x)|$ mit Hilfe der Dreiecksungleichung.

Halten Sie diese Abschätzung für grob? Erklären Sie Ihre Beobachtungen aus dem Programm mit Hilfe der Abschätzung.

Aufgabe 8: (6 Punkte)

Lösen Sie folgende Randwertprobleme:

(a) Mit Dirichlet Randbedingungen:

$$\begin{aligned} u''(x) &= 8e^{2x} - \sin(x) \quad \text{für } \pi < x < 2\pi \\ u(\pi) &= 2e^{2\pi} \\ u(2\pi) &= 2e^{4\pi} + 1 \end{aligned}$$

(b) Mit einer Dirichlet und einer Neumann Randbedingung:

$$\begin{aligned} u''(x) &= 8e^{2x} - \sin(x) \quad \text{für } \pi < x < 2\pi \\ u'(\pi) &= 4e^{2\pi} \\ u(2\pi) &= 2e^{4\pi} \end{aligned}$$

Abgabe am 18. April 2019 am Beginn der Vorlesung.
Abgabe der Programmieraufgaben bis zum 18. April 2019 um 10:30 an david.kerkmann@hhu.de.
Besprechung in den Übungen am 23. April 2019.