MATHEMATISCHES INSTITUT
PROF. DR. CHRISTIANE HELZEL
DAVID KERKMANN

27. JUNI 2019

HEINRICH HEINE UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

45	46	47	Σ

NAME: ____________________

MAT-NR.: ____________________

Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen – 13. Übungsblatt

Aufgabe 45: (6 Punkte)

Betrachten Sie für $\theta \in \mathbb{R}$ die θ-Methode

$$U^{n+1} = U^n + k\left((1-\theta)f(U^n, t_n) + \theta f(U^{n+1}, t_{n+1}).\right)$$

(a) Zeigen Sie, dass die Methode genau dann A-stabil ist, wenn $\theta \geq \frac{1}{2}$.

(b) Für welche Wahl von θ ist das Verfahren L-stabil?

Aufgabe 46: (6 Punkte)

Das r-stufige BDF-Verfahren lautet:

$$\sum_{j=0}^{r} \alpha_j U^{n+j} = k\beta_r f(U^{n+r}, t_{n+r})$$

Wir verwenden die Normierung $\beta_r = 1$.

(a) Bestimmen Sie die Koeffizienten α_0, α_1, α_2, α_3 des 3-stufigen BDF-Verfahrens unter Verwendung der Konsistenzbedingungen.

(b) Zeigen Sie, dass gilt:

$$\sum_{j=1}^{r} \frac{1}{j} \nabla^j U^{n+r} = kf(U^{n+r}, t_{n+r})$$

Hier sind die Differenzen $\nabla^j U^{n+r}$ rekursiv definiert durch:

$\nabla^0 U^{n+r} = U^{n+r}$

$\nabla^j U^{n+r} = \nabla^{j-1} U^{n+r} - \nabla^{j-1} U^{n+r-1}$, $j \geq 1$

Hinweis: Legen Sie ein Interpolationspolynom $P(t)$ durch die Punkte (t_{n+j}, U^{n+j}), $j = 0, \ldots, r$. Beachten Sie die Analogie der ∇^j zu den dividierten Differenzen bei der Newton-Darstellung des Interpolationspolynoms. Fordern Sie dann $f(U^{n+r}, t_{n+r}) = P'(t_{n+r})$.

(c) Berechnen Sie die Koeffizienten aus (a) erneut, indem Sie die Formel aus (b) verwenden.

Aufgabe 47: (6 Punkte)

Betrachten Sie die Van der Pol Gleichung

$$\varepsilon y''(t) - d(1 - y^2(t))y'(t) + y(t) = 0.$$

Berechnen Sie die numerische Lösung mit einem geeigneten Verfahren und zeichen Sie die Lösung im Phasenraum $t \mapsto (y(t), y'(t))$ für die folgenden zwei Parametersets:

- $t_0 = 0$, $T = 16$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$, $\varepsilon = 1$, $d = 4$
- $t_0 = 0$, $T = 4$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$, $\varepsilon = 0.001$, $d = 1$

Abgabe am 4. Juli 2019 am Beginn der Vorlesung.
Abgabe der Programmieraufgaben bis zum 4. Juli 2019 um 10:30 Uhr an david.kerkmann@hhu.de.
Besprechung in den Übungen am 9. Juli 2019.