MATHEMATISCHES INSTITUT

PROF. DR. CHRISTIANE HELZEL
DAVID KERKMANN

20. JUNI 2019

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

42	43	44	Σ

NAME: ____________________

MAT-NR.: ____________________

Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen – 12. Übungsblatt

Aufgabe 42: (6 Punkte)

Zeigen Sie, dass für die Stabilitätsfunktion $R(z)$ eines r-stufigen diagonal-impliziten Runge-Kutta-Verfahrens (DIRK-Verfahren) (b, c, A) gilt, dass

$$R(z) = \frac{q(z)}{p(z)},$$

wobei q und p Polynome vom Grad r sind und p die Form

$$p(z) = \prod_{i=1}^{r} (1 - a_{i,i} z)$$

besitzt.

Aufgabe 43: (6 Punkte)

Betrachten Sie die gewöhnliche Differentialgleichung

$$u'(t) = \lambda \left(u(t) - \cos(t)\right) - \sin(t)$$

mit Anfangswert $u(0) = 1.5$ und $\lambda = -10^6$. Die exakte Lösung lautet:

$$u(t) = \frac{1}{2} e^{\lambda t} + \cos(t)$$

(a) Verwenden Sie das explizite Euler-Verfahren, um die Lösung bis zum Zeitpunkt $T = 3$ zu bestimmen. Welche ungefähre maximale Schrittweite können Sie wählen, damit das Verfahren stabil bleibt?

(b) Verwenden Sie nun das implizite Euler-Verfahren sowie die Trapezregel. Was stellen Sie fest?

(c) Das TR-BDF2 Verfahren lautet:

$$U^* = U^n + \frac{k}{4}(f(U^n) + f(U^*)),$$
$$U^{n+1} = \frac{1}{3}(4U^* - U^n + k f(U^{n+1})).$$

Implementieren Sie auch dieses Verfahren. Was ist der Vorteil gegenüber dem impliziten Euler-Verfahren?

Aufgabe 44: (6 Punkte)

Betrachten Sie das Anfangswertproblem

$$U'(t) = -AU(t), \quad U(0) = U_0$$

mit

(a)

$$A = \frac{1}{\varepsilon} \begin{pmatrix} 1 & & & -1 \\ -1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{10\times 10}$$

(b)

$$A = \frac{1}{2\varepsilon} \begin{pmatrix} 0 & 1 & & -1 \\ -1 & 0 & 1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ 1 & & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{10\times 10}$$

(c)

$$A = \frac{1}{\varepsilon^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & & -1 \\ -1 & 2 & -1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ -1 & & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{10\times 10}$$

Es gelte $\varepsilon > 0$. Plotten Sie die Eigenwerte der jeweiligen Matrizen für $\varepsilon = 0.1$. Diskutieren Sie geeignete Einschrittverfahren zur Zeitdiskretisierung des Anfangswertproblems. Wie groß ist der Zeitschritt für die jeweiligen Verfahren zu wählen (in Abhängigkeit von ε)? Welche der Verfahren erlauben einen Zeitschritt der Größe $\mathcal{O}(\varepsilon)$? Begründen Sie ihre Antworten.

Abgabe am 27. Juni 2019 am Beginn der Vorlesung.
Abgabe der Programmieraufgaben bis zum 27. Juni 2019 um 10:30 Uhr an david.kerkmann@hhu.de.
Besprechung in den Übungen am 2. Juli 2019.