MATHEMATISCHES INSTITUT

PROF. DR. CHRISTIANE HELZEL
DAVID KERKMANN

13. JUNI 2019

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

38	39	40	41	Σ

NAME: ____________________

MAT-NR.: ____________________

Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen – 11. Übungsblatt

Aufgabe 38: (6 Punkte)

(a) Wenden Sie die Trapezregel auf die Gleichung $u' = \lambda u$ an und zeigen Sie, dass

$$U^{n+1} = \left(\frac{1+\frac{z}{2}}{1-\frac{z}{2}}\right) U^n$$

mit $z = \lambda k$ gilt.

(b) Sei

$$R(z) = \frac{1+\frac{z}{2}}{1-\frac{z}{2}}$$

Zeigen Sie, dass $R(z) = e^z + \mathcal{O}(z^3)$ gilt und folgern Sie, dass der Einschritt-Fehler der Trapezregel für dieses Problem von der Größenordnung $\mathcal{O}(z^3)$ ist.

Hinweis: Benutzen Sie die geom. Reihe für $\frac{1}{1-\frac{z}{2}}$ und multiplizieren Sie mit $(1+\frac{z}{2})$.

Aufgabe 39: (6 Punkte)

Bestimmen Sie die Stabilitätsfunktion $R(z)$ des klassischen Runge-Kutta-Verfahrens 4. Ordnung und zeichnen Sie das Stabilitätsgebiet $S = \{z \in \mathbb{C} \mid |R(z)| \leq 1\}$ mithilfe eines Programms.

Aufgabe 40: (6 Punkte)

Zeigen Sie, dass das Gebiet absoluter Stabilität für die Mittelpunktregel

$$U^{n+1} = U^{n-1} + 2kf(U^n)$$

das offene Intervall $(-i, i)$ ist.

b.w.

Aufgabe 41: (6 Punkte)

Beweisen Sie Lemma 7.8 der Vorlesung.

Hinweis: Sei λ Nullstelle von $\rho(\zeta)$, dann ist $(\lambda^{r-1}, \lambda^{r-2}, \ldots, 1)$ Eigenvektor der Matrix A zum Eigenwert λ. Das heißt die Eigenwerte von A sind Nullstellen von $\rho(\zeta)$ und erfüllen die Wurzelbedingung.

Zeigen Sie zunächst, dass eine Jordanzerlegung der folgenden Gestalt existiert:

$$T^{-1}AT = J = \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_l \end{pmatrix},$$

wobei

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & \varepsilon & & & \\ & \lambda_i & \varepsilon & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_i & \varepsilon \\ & & & & \lambda_i \end{pmatrix}$$

Jordanblock der Größe m_i ist, wobei m_i die Vielfachheit des Eigenwerts λ_i ist, und $\varepsilon > 0$.

Finden Sie dann ein geeignetes ε, sodass $\|J \otimes Id\|_\infty \leq 1$.

Unter Verwendung der Transformation T definieren wir die Vektornorm $\|x\| := \|(T^{-1} \otimes Id)x\|_\infty$, $T \in \mathbb{R}^{r \times r}$, $Id \in \mathbb{R}^{s \times s}$. Zeigen Sie für die induzierte Matrixnorm die Behauptung.

Abgabe aufgrund des Feiertags bis zum 21. Juni 2019 um 14:00 Uhr. Die Abgabe darf auch elektronisch erfolgen an david.kerkmann@hhu.de. Bitte achten Sie dann darauf, den Anhang der E-Mail möglichst klein zu halten.
Abgabe der Programmieraufgaben bis zum 21. Juni 2019 um 14:00 Uhr an david.kerkmann@hhu.de.
Besprechung in den Übungen am 25. Juni 2019.