Mathematisches Institut

Prof. Dr. Christiane Helzel
David Kerkmann

6. Juni 2019

34	35	36	37	Σ

Name: ____________________

Mat-Nr.: ____________________

Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen – 10. Übungsblatt

Aufgabe 34: (8 Punkte)

Untersuchen Sie die folgenden linearen Mehrschrittverfahren auf Konvergenz.

(a) $U^{n+2} = \frac{1}{2}U^{n+1} + \frac{1}{2}U^n + 2kf(U^{n+1})$

(b) $U^{n+1} = U^n$

(c) $U^{n+4} = U^n + \frac{4}{3}k(f(U^{n+3}) + f(U^{n+2}) + f(U^{n+1}))$

(d) $U^{n+3} = -U^{n+2} + U^{n+1} + U^n + 2k(f(U^{n+2}) + f(U^{n+1}))$

Aufgabe 35: (6 Punkte)

Es seien $\zeta_1, \dots, \zeta_l$ Nullstellen der Vielfachheit $m_1, \dots, m_l$ des charakteristischen Polynoms $\rho(\zeta)$.

Zeigen Sie, dass die allgemeine Lösung der Differenzengleichung

$$\alpha_0 U^n + \alpha_1 U^{n+1} + \dots + \alpha_r U^{n+r} = 0$$

die Form

$$U^n = p_1(n)\zeta_1^n + \dots + p_l(n)\zeta_l^n$$

hat. Dabei seien für $j \in \{1, \dots, l\}$ die $p_j(n)$ Polynome vom Grad $m_j - 1$.

Aufgabe 36: (6 Punkte)

Eine Fibonacci Folge erhält man durch die Bildungsvorschrift

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

mit $F_0 = 0$ und $F_1 = 1$.

Zeigen Sie, dass für große n das Verhältnis F_n/F_{n-1} gegen den goldenen Schnitt ($\phi \approx 1.618034$) strebt.

Aufgabe 37: (6 Punkte)

Betrachten Sie für $\alpha \in \mathbb{R}$ das explizite lineare 3-Schritt Verfahren

$$U^{n+3} + \alpha U^{n+2} - \alpha U^{n+1} - U^n = \frac{k}{2}(3 + \alpha)\left(f(U^{n+2}) + f(U^{n+1})\right).$$

(a) Bestimmen Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$, sodass das Verfahren nullstabil ist.

(b) Bestimmen Sie $\alpha \in \mathbb{R}$, sodass das Verfahren eine möglichst hohe Konsistenzordnung besitzt und geben Sie die maximale Konsistenzordnung an. Zeigen Sie außerdem, dass dieses Verfahren exakt die Konsistenzordnung $p = 2$ hat, wenn es nullstabil ist.

Abgabe am 13. Juni 2019 am Beginn der Vorlesung.
Abgabe der Programmieraufgaben bis zum 13. Juni 2019 um 10:30 Uhr an david.kerkmann@hhu.de.
Besprechung in den Übungen am 18. Juni 2019.